OMEGA

J. D. Williams

# STRATEG DOSKONAŁY
## WPROWADZENIE DO TEORII GIER

PW

Współczesna Biblioteka Naukowa

# Omega

J. D. Williams

# Strateg doskonały

## Wprowadzenie do teorii gier

---

Warszawa 1965
Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Tytuł oryginału angielskiego:
*The Compleat Strategyst being a primer on the theory of games of strategy*
by J. D. Williams
with pictorial illustrations
by Charles Satterfield
first edition, published 1954
by McGraw-Hill Book Company, Inc.
New York, Toronto, London





Tłumaczył: Ignacy Roman

Ilustrował: Charles Satterfield

Okładkę projektował: Tadeusz Pietrzyk

Printed in Poland

Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Warszawa 1964

Redaktor techniczny: Leokadia Lass

Wydanie I. Nakład 27.730 + 270 egz.
Ark. wyd. 11. Ark. druk. 15.
Papier ilustracyjny kl. V. 70 g, 77 × 95.
Oddano do składania 7. VIII. 1964.
Podpisano do druku w grudniu 1964.
Druk ukończono w grudniu 1964.
Zamówienie 1576/64. — O-8. Cena w subskrypcji zł 10,—
Zakłady Graficzne im. M. Kasprzaka w Poznaniu

# Spis treści

*Ewelinie, która nawet to przeczytała*

# Przedmowa

Idea napisania tej książki pojawiła się pewnego razu w czasie rozmowy kilku osób, które zajmowały się od paru lat problemami rozwoju i zastosowania Teorii Gier Strategicznych. Chociaż interesowały się przede wszystkim i bezpośrednio zastosowaniem tej teorii do problemów wojskowych — w szczególności zaś w lotnictwie — to jednak zainteresowania pośrednie były znacznie szersze, praktycznie nieograniczone.

Sens dyskusji był następujący: gdyby istota teorii gier znana była powszechniej, zyskała by na tym zarówno sama teoria, jak i poszerzone grono jej „wyznawców". Obecnie zna ją rzeczywiście wąska grupa specjalistów. Nieco szersza grupa słyszała coś o niej i wyobraża sobie, nieraz zresztą dość mgliście, jej zakres i charakter; przedstawiciele tej grupy zmuszeni są zwykle przyjmować lub odrzucać idee teorii gier wskutek niedostatecznej wiedzy. Wydawało się nam, że warto spróbować przerzucić most ponad przepaścią, rozdzielającą matematyczną działalność zawodowych kapłanów nauki i ślepą z konieczności reakcję inteligentnego dyletanta, któremu dotąd nie było dane zaznajomić się z matematycznymi szczegółami.

Zdając sobie sprawę z tego, że rozmowa nie powinna skończyć się tylko na wnioskach, postanowiono powie-

rzyć komukolwiek napisanie odpowiedniej książki. Po przedyskutowaniu wielu doskonałych, choć nieco roztrzepanych kandydatów, ze zdziwieniem spostrzegłem, że wybór padł na mnie. Warto być może wymienić cechy, dzięki którym wygrałem (a może przegrałem?) ten „konkurs": po pierwsze — byłem pod ręką, zawsze osiągalny; po drugie — chociaż od paru lat z dziedziną Teorii Gier związany byłem uczuciowo, to jednak jako absolutny nieuk w dziedzinie większości jej najbardziej technicznych aspektów nie mógłbym chyba pisząc tę książkę nauczyć się dostatecznie wiele, aby poważnie zepsuć materiał, który należało przekazać Czytelnikowi; po trzecie — byłem doskonale „ustawiony" zarówno z organizacyjnego punktu widzenia, jak i z uwagi na wrodzoną skłonność oszczędzania własnej energii; dzięki tym cechom mogłem bez skrępowania zwracać się do moich kolegów z prośbą o pomoc i radę; taki zaś podział pracy wszystkim dogadzał.

Moje intencje odnośnie charakteru książki, jej zakresu i stylu, a zatem jej czytelników, zmieniały się parokrotnie w czasie pisania. W końcu okazało się, że napisaliśmy elementarz-samouczek teorii gier. Sądzę, że możecie zasiąść nad nim i przezwyciężając naturalne trudności towarzyszące wysiłkowi umysłowemu — przykre, lecz nie zabójcze — nauczycie się formułować i rozwiązywać proste zadania zgodnie z zasadami teorii gier.

Już to samo wydaje się dość cenne. Mamy nadzieję, że ważką rolę odegrają przykłady; winny one bowiem pobudzać wyobraźnię. Materiału do nich zaczerpnęliśmy z najróżniejszych dziedzin działalności, chcąc zachęcić do rozpatrywania niektórych własnych problemów w świetle teorii gier. Niewiele więcej powiedzieć można w obronie przytoczonych przykładów; są nieraz ubogie w treść i w pewnym stopniu niepoważne w tonie. Trudno, by były jednocześnie proste, a nieuproszczone; ich forma z jednej strony jest rodzajem obrony przed ekspertem w dziedzinach, których dotyczą przykłady (ten zrozumie, jak uboga jest ich treść), z drugiej zaś środkiem przeciwdziałającym znużeniu czytelnika.

W książce nie ma matematyki, tylko prosta arytmetyka z włączeniem pojęcia liczb ujemnych. Innymi słowy, wystarczy wiedzieć, jak się dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby ujemne i dodatnie; najczęściej dotyczy to zresztą liczb całkowitych. W tekście pominęliśmy symbolikę matematyczną — ograniczenie szalone, lecz narzucone świadomie. Ale nie miejmy złudzeń, nie każdy — nawet jeśli bardzo zechce — będzie mógł formułować i rozwiązywać trudne problemy teorii gier; ostatecznie jest to trudna nauka. Jednak wielu może nauczyć się poruszania wśród niektórych jej zagadnień, a jeszcze większy krąg ludzi może ocenić możliwości i granice tej dziedziny.

Sądzimy, że teoria gier — lub coś w jej rodzaju — w miarę rozwoju może stać się ważną koncepcją naukową wpływającą na wiele dziedzin życia. Aby to, co możliwe, przekształcić w prawdopodobne, spełnić trzeba kilka warunków. Jeden z nich polega na tym, by potencjalny użytkownik teorii gier zaznajomił się z nią i wziął to, co teoria ta może zaoferować dzisiaj, bądź też by podsunął odpowiednie problemy i w ten sposób tak zabezpieczył rozwój teorii gier, aby mogła mu się ona okazać użyteczna w przyszłości.

Wyrażenie wdzięczności to zadanie bardzo trudne. Wszystkich moich przyjaciół, a w szczególności moich kolegów bezwstydnie obciążałem zadaniem wynajdywania przykładów. Korzystałem z ich pomysłów, przenosiłem je do obcej scenerii nadając aktorom imiona podobne (a po prawdzie identyczne) z imionami moich dobroczyńców. Dzięki temu nudne pisanie stało się interesującym zajęciem, a wszyscy pomogli mi podwójnie.

Jednakże obawa, by kogoś nie pominąć (a tego nie da się uniknąć, gdy ma się tak wielu wierzycieli), nie może powstrzymać mnie od próby przeprowadzenia bilansu moich długów. Przede wszystkim niezbędne dla mojej edukacji okazały się potężne manuskrypty M. E. Dreshera z RAND i zmarłego J. C. C. McKinseya, poprzednio pracującego w RAND, a później w Stanford University; zawierają one podsumowanie dziesiątków artykułów zarówno naszych kolegów, jak i innych autorów. Jestem wdzięczny za pomysły R. E. Bellmanowi, R. L. Belzerowi, N. C. Dalkeyowi, J. M. Danskinowi, W. H. Flemingowi, D. R. Fulkersonowi, Melvinowi Hausnerowi, Olafowi Helmerowi, S. M. Jonsonowi, Abrahamowi Kaplanowi, A. M. Moodowi,

E. W. Paxonowi, E. S. Quade'owi, R. D. Spechtowi i J. G. Wendelowi, wszystkim z RAND; a także E. W. Barankinowi z Uniwersytetu w Kalifornii, D. H. Blackwellowi z Howard University, S. C. Kleene'owi z University of Wisconsin, Oskarowi Morgensternowi i A. W. Tuckerowi z Princeton University, P. M. Morse'owi Z MIT, R. M. Thrallowi z University of Michigan i C. B. Tompkinsowi z George Washington University.

Następujące osoby, prócz niektórych wymienionych powyżej, przeczytały i skomentowały (wiele z nich bardzo dokładnie) ten rękopis: Bernard Brodie, G. W. Brown, R. W. Clewett, F. R. Collbohm, G. D. Dantzig, M. M. Flood, O. A. Gross, C. Hastings Jr., B. W. Haydon, S. P. Jeffries, J. L. Kennedy, J. A. Kershaw, J. S. King Jr., i R. A. Wagner — wszyscy z RAND, oraz E. F. Beckenbach z Uniwersytetu w Kalifornii, General Major G. R. Cook, C. F. Mosteller z Harvard University i (prawdopodobnie) inni. Pani Ruth Burns wielokrotnie przygotowywała rękopis z nieprawdopodobną szybkością i dokładnością.

Jestem szczególnie wdzięczny Warrenowi Weaverowi z Fundacji Rockefellera, którego życzliwość dla mnie i zainteresowanie tematyką skłoniły do bardzo dokładnego przeczytania rękopisu. Jego celne uwagi zmierzające do zwiększenia przejrzystości wykładu były zawsze cenne, choć niekiedy aż nużące.

RAND pozwoliła mi tak zreorganizować pracę, by umożliwić mi napisanie książki.

Rozumie się chyba samo przez się, że gdy autor niewielkiej książki jest winien tak wiele tak wielu ludziom, to naprawdę tylko on ponosi odpowiedzialność za pomyłki. W podobnej sytuacji „strateg doskonały" utworzyłby natychmiast koalicję z Naturą i dzieliłby z nią odpowiedzialność.

*J. D. Williams*

... „tym niemniej wierzę, że rozpatrując te problemy dokładniej. Czytelnik szybko zobaczy w nich nie tylko proste gry, lecz także podstawę dla ciekawych i głębokich rozmyślań".

— Huygens, 1657

# 1

# Wstęp

## Charakter przedmiotu

Aż zbyt dobrze wiadomo już dzisiaj, że istnieje wiele sposobów, by rozpocząć książkę. Większość z nich okazuje się od pierwszego wejrzenia po prostu zła. Ale nie możemy oprzeć się nadziei, że gdzieś tam wśród nich mogą kryć się metody mające takie szlachetne cechy: autor informuje Czytelników — (mogą oni tego nawet nie podejrzewać) — językiem całkiem zrozumiałym, a jednocześnie dźwięczy to jak śpiew Lorelei. Tu następuje podział Czytelników na dwie grupy: pierwsza, wielka i naprawdę szczęśliwa rodzina, nie odrywa się od książki aż do ostatniej stronicy nawet wówczas, jeśli grożą jej niewyobrażalne trudności. Ci ludzie będą zawsze miło myśleć i wypowiadać się o książce i będą mieli niewątpliwie w każdym pokoju po jednym co najmniej egzemplarzu. Najkrótsza charakterystyka grupy drugiej sprowadza się do stwierdzenia, że różni się od pierwszej. Na czytelnika tej grupy książka działa jak środek nasenny, kojący wszystkie nieprzyjemne uczucia. Książkę odkłada sennie na bok, myśląc już tylko o tym, komu ją podarować.

Jeśliby się nam udało wymyślić podobną strategię debiutu, to w sposób doskonały zawarty byłby w niej temat i cel naszej książki, ponieważ *będziemy zajmować się metodami wyboru optymalnych strategii* nawet w kontekstach, w których słowa „strategia" nie stosuje się powszechnie.

Interesują nas sytuacje, w których krzyżują się sprzeczne tendencje: krótko mówiąc — sytuacje konfliktowe. Problem, jak rozpocząć tę książkę, zalicza się oczywiście do sytuacji konfliktowych, ponieważ cele Czytelników i autora są przeciwstawne, a nasze interesy sprzeczne. Przecież my chcemy wciągnąć Was podstępnie do naprawdę ciężkiej pracy intelektualnej, podczas gdy Wy, osobnicy rozsądni, obarczeni dostateczną już ilością innych kłopotów, pragniecie jedynie odpoczynku i zaspokojenia ciekawości. Takie starcie interesów stanowi istotę sytuacyj, które będziemy badać.

Mamy tu do czynienia z innym jeszcze czynnikiem o równie podstawowym znaczeniu: każdy z nas może w pewnym stopniu kierować sytuacją, i to na wiele sposobów. Możecie, na przykład, rzucić tą książką w kota, powodując rozdrażnienie zarówno autora, jak i kota za cenę pewnych strat materialnych, pewnego nadwątlenia





godności własnej i niewątpliwie kosztem pogorszenia stosunków z kotem. Albo też można pominąć trudniejsze partie tekstu itp. Autor także rozporządza pewnymi sposobami kierowania: np. wybór i sposób podania treści — nie warto jednak o tym za szeroko ... W przykładzie naszym pojawia się następny charakterystyczny czynnik: niektóre elementy sytuacji nie są podporządkowane ani Wam, ani mnie. Na przykład, wiele zdarzeń z naszej przeszłości, a także różne odziaływania zewnętrzne mogą odegrać istotną rolę w czasie pisania i czytania książki. Znalezienie rzeczywiście optymalnego sposobu rozpoczęcia książki kryje jeszcze inny problem: zadanie okazać się może zbyt trudne dla nas do rozwiązania.



Ponieważ ograniczenia dotyczące tej treści problemu są tak nieliczne i niekategoryczne, można wyciągnąć wniosek, że krąg konfliktowych sytuacji, które chcemy rozpatrzeć, jest wszechobejmujący. Nie widzę w zasadzie przeszkód, by rozpatrywać zagadnienia pojedynku na bomby wodorowe między Marsem i Ziemią lub też mi-

łosnych historii w stylu pani Barett-Browning[1]. Współzawodnictwo może mieć charakter ekonomiczny lub być zabawą w muzykalne krzesła[2]. Bądź też może być jednym z wielu działań w czasie wojny konwencjonalnej. Nie wynika z tego, że dysponujemy niezawodnym środkiem przeciw 'arapatom strategicznym we wszystkich tych dziedzinach, trudno jednak wykluczyć, że nasza metoda może okazać się użyteczna dla którejś z nich.

Metodę, którą przedstawimy, ochrzczono mianem *Teorii Gier* lub, jeśli czas pozwala, teorii gier strategicznych. Teoria wywodzi swą nazwę z faktu, iż badanie gier jest użytecznym i wygodnym punktem wyjściowym przy badaniu strategii. Ale ta odpowiedź nie wystarcza, rozlega się pytanie: dlaczego? Otóż dlatego, że gry zawierają wiele składników wspólnych wszystkim konfliktom i dlatego, że stosunkowo łatwo można je opisać i zbadać. (Przy okazji, skoro użyliśmy już słowa „gra" do nazwania tej teorii, nazywać będziemy odtąd grą każdy konflikt rozpatrywany z punktu widzenia tej teorii).

Dla wyjaśnienia rozpatrzmy grę w pokera, zwracając uwagę na te jej cechy, które są istotne np. dla konfliktu wojennego. Tak więc ty i czterej twoi partnerzy studiujecie naturę ludzką z nadzieją o wygranej. Od razu zauważamy, że interesy graczy są przeciwstawne: każdy chce wygrać, a ponieważ wygrana jednego oznacza niewątpliwie przegraną innych, to interesy ich są sprzeczne. To stanowi istotę konfliktu. Zauważmy również, że niektóre elementy gry zależą całkowicie od osobistego wyboru i podlegają pełnej kontroli graczy. A ponieważ dotyczy to każdego z nich, istnieją czynniki, którymi nie możemy kierować i — co gorsza — są one kierowane przez tych, których cele są



sprzeczne z naszymi. Istnieją wreszcie — zgodnie z prawidłami — elementy gry znajdujące się poza władzą graczy, np. kolejność kart w talii. Te elementy można rozpatrywać jako znajdujące się pod kontrolą Natury, imponująco zrównoważonej osobowości, która lubi w różnych sprawach wodzić za nos, choć nie czuje do nas świadomej wrogości. Oto dobrze znane cechy dowolnej sytuacji konfliktowej.

Innym czynnikiem jest stan informacji — czy wywiadu wg terminologii wojennej — element zwykle niedoskonały, a więc przysparzający kłopotów: nie wiemy, jakie karty są w rękach partnerów. Istnieje także możliwość bluffowania, gdy zarówno my, jak i nasi przeciwnicy staramy się stworzyć fałszywe pozory na temat zamiarów i sił. Mogą nam przyjść do głowy i inne analogie; od czasu do czasu ludzie się nawet zabijają.

Nie wysuwajmy jednak analogii zbyt odległych. Przytoczyć można wiele cech sztuki wojennej, które nie przejawiają się w pokerze. Jeden czołg może czasem pokonać dwa czołgi, podczas gdy w pokerze dwa walety zawsze biją asa. Można oczywiście zmodyfikować pokera: np. ustalić regułę, według której as zawsze bije każdą parę do waletów włącznie, gdy przy odkryciu kart rozlega się dzwonek telefonu od żony jednego z graczy. Jednakże pozostaje faktem, że gry nie zawierają wszystkich skomplikowanych cech działań wojennych lub innych sytuacji konfliktowych codziennego życia i dlatego właśnie są



użytecznym punktem wyjściowym dla badania strategii. Przecież na pierwszych etapach rozwoju teorii nie można po prostu równocześnie rozpatrywać bardzo wielu współdziałających czynników.

W grach zawarte są jednak pewne elementy podstawowe, występujące prawie w każdej ciekawej sytuacji konfliktowej. Czy oznacza to, że nauczymy się użytecznych rzeczy rozpoczynając badania od gier? Niekoniecznie — może okazać się, że sytuacje wojenne, ekonomiczne i społeczne są tak skomplikowane, że nie można do nich zastosować koncepcji gier. Jest to tym bardziej prawdopodobne, że obecny poziom teorii gier nie jest w stanie zapewnić sukcesu nawet w zakresie gier rozrywkowych bez ich uproszczenia. Dlatego ograniczamy się do bardzo prostych gier i zubożonych wersji tak złożonych, jak poker.

Może się więc wydać dziwnym, że ktoś wydatkuje cenną energię na badanie i rozwój teorii gier i, co więcej, oczekuje, że będziecie w tym uczestniczyć. Przyczyna jest częściowo aktem nadziei i wiary, opartym jednak na poprzednich osiągnięciach. Przecież analiza uproszczonych umyślnie teorii jest jedną z ważniejszych metod naukowych, w szczególności w tzw. naukach ścisłych szeroko stosujących analizę matematyczną. Jeśli biofizyk może z powodzeniem stosować uproszczony model komórki, a kosmolog — uproszczony model Wszechświata, to i nam wolno oczekiwać, że uproszczone gry okażą się cennym modelem bardziej złożonych konfliktów.

Niewątpliwie śmiertelność wśród takich teorii jest wyższa niż ta, jaką mogłaby tolerować dowolna organizacja militarna w swoich działaniach. Zresztą nawet naprawdę udane teorie w rzeczywistości nie są nieśmiertelne; najlepsze, czego możemy od nich oczekiwać, to ich stosowalność do pewnych określonych celów i w odpowiednim momencie.

## Przykład historyczny

Rozpatrzmy jakąś udaną abstrakcję naukową, aby zobaczyć, co to właściwie takiego, i aby uzyskać wskazówki



na przyszłość. Wybierzmy taką, która jest niewątpliwym przykładem heroicznego „nad-uproszczenia".

Załóżmy, że możemy dla zbadania obrotów ciał niebieskich Układu Słonecznego zastąpić każde z nich punktem; że każdy punkt posiada masę równą masie przedstawionego ciała niebieskiego; że każda para punktów przyciąga się wzajemnie; że możemy obliczyć siłę przyciągania mnożąc masę jednego punktu przez masę drugiego i dzieląc iloczyn przez kwadrat odległości między punktami; że możemy zaniedbać wszystko pozostałe i że nie jest zupełnym idiotyzmem zajmowanie się tą teorią — inaczej bowiem nie wspominalibyśmy nawet o niej.

I rzeczywiście teoria ta — teoria ciążenia — przez dwa i pół wieku była wystarczająca, aby przewidzieć ruch planet, przy stałej kontroli specjalistów pozycyjnej astronomii, którzy — co należy uczciwie przyznać — doprowadzili dokładność do maksimum. Największa rozbieżność z teorią pojawiła się przy obliczaniu orbity Merkurego, która z niedających się wyjaśnić przyczyn różniła się od przewidywanej orbity o jedną pięciotysięczną radiana w ciągu stulecia, wskazując, że teoria jest mimo wszystko tylko przybliżona, jak na to zresztą wyglądała. Tę rozbieżność wyjaśniła udoskonalona teoria opracowana przez Einsteina.

## Lekcje i paralele

Elementy powyższej teorii nie wpadły oczywiście do głowy w chwili, gdy spadło na nią jabłko. W tym czasie, głównie dzięki pracom Tycho de Brahe, posiadano wiele danych o rzeczywistym zachowaniu się planety. Kepler wyciągnął z nich parę prostych praw. Dysponując tym wszystkim i korzystając z nowego wynalazku

matematycznego — rachunku różniczkowego — Newton wkrótce doszedł do wspomnianej teorii. Miał tylko nieszczęście zastosować ją od razu do badania ruchu Księżyca i kosztowało go to parę lat niezadowolenia ze swojej teorii, ponieważ obliczenia wykazały poważne błędy.

Przykład ten może być dla nas źródłem paru wniosków. Po pierwsze, teorie mogą być bardzo proste, podczas gdy zjawiska przez nie modelowane nie są wcale proste. Nikt z zakładających, że ruchem planet kierują proste prawa, nie odważył się przewidywać położenia planet. Nasi przodkowie mieli dostateczne podstawy, by nazywać je Wędrowcami. Drugi wniosek: teoria może być bardzo ogólna, ogarniać szeroki zakres zjawisk nie będąc przy tym bezpłodną. Teoria ciążenia ma nawet szersze zastosowanie niż wspomniane powyżej, ponieważ stosuje się ją do wszystkich ciał posiadających masę, a nie tylko do wielkich planet Układu Słonecznego. Inny wreszcie wniosek: teorie często, lub nawet zwykle, są niedoskonałe, choć teoria przytoczona jako przykład okazała się zaskakująco dobra. Kolejny i to bardzo ważny wniosek głosi, że teoria dotyczy tylko jednego z interesujących nas czynników, które mogą mieć wpływ na ruch ciał, a poza tym czynnik ten można często pomijać; np. siła przyciągania między dwoma samolotami lecącymi blisko siebie równa jest masie popiołu z papierosa o długości ok. 1,5 mm.

Przykład nasz ukazuje również wagę dostępnych danych naukowych. Pod tym względem Newton był w nieco lepszym położeniu niż my, którzy staramy się znaleźć abstrakcję w takiej dziedzinie, jak konflikt. Przecież większość naszych danych dotyczy poszczególnych ludzi i ich fizycznej i umysłowej struktury, zdrowia, zdolności itd., a w znacznie mniejszym stopniu uogólnionych charakterystyk grup ludzkich. Stosunki między ludźmi jako jednostkami wchodzącymi w skład grup lub między grupami ludzi nie są jeszcze zbadane w wystarczającym stopniu. A te właśnie stosunki są tworzywem, z którego wynika konflikt.

Zauważyć wreszcie musimy, że Newton niemal równocześnie opracował teorię ciążenia i nową dziedzinę matematyki — rachunek różniczkowy, bez którego teoria

byłaby praktycznie nie do zastosowania. Istotnie, rachunek różniczkowy odegrał decydującą rolę we wszystkich naukach fizycznych w ciągu ćwierci tysiąclecia. Byłoby wręcz prowokacją wnosić, że teoria gier zrodzi nową dyscyplinę matematyczną, która odegra analogiczną rolę w badaniu stosunków międzyludzkich. Do tej pory mało w naszej teorii elementów, które można byłoby uznać za coś „spod igły", a w wielu rozpoznać łatwo zapożyczenia z istniejących dziedzin matematyki. Może to jednak nastąpi i chyba nawet musi, jeśli stosowanie tej metody ma przynieść bogate plony. Warto podkreślić, że pierwszego opracowania teorii gier dokonał jeden z rzeczywiście wielkich matematyków i wszechstronnych umysłów naszych dni — John von Neumann [3].

Teoria gier bliska jest duchem teorii ciążenia. Obie próbują rozpatrywać szeroką klasę zjawisk za pomocą abstrakcyjnych modeli. Obie nie dążą do modelowania wszystkich złożonych zjawisk, które mogą powstać w dowolnej sytuacji. Jedna z nich zajmuje się działalnością żywych istot w zakresie pewnych poczynań niezależnych od woli; teoria ciążenia może odpowiedzieć na pytania dotyczące zasadniczego kierunku ruchu lotnika spadającego z wysokości 12 tys. m, któremu nie przeszkadza samolot, spadochron ani jakiekolwiek inne urządzenie. Teorię gier natomiast bardziej interesowałaby strategia, którą zastosowałby lotnik w określonej sytuacji, i to strategia optymalna wśród wszystkich możliwych. Inaczej mówiąc, teoria gier wkracza w dziedzinę podejmowania decyzji i wolnej woli.

To porównanie z teorią ciążenia nie byłoby najlepsze, gdyby sugerowało porównywalną stosowalność i wartość — aby nie rzec stanowisko społeczne — obu teorii. Jedna jest w pełni dojrzała i wygodnie usadowiła się jako bardzo użyteczne przybliżenie rzeczywistości; druga jest zdrowym dzieckiem — może je pochłonąć morowe powietrze, ale może też wyróść i zająć ważne stanowisko; na razie pożytek jeszcze z niego niewielki. Jako dziecko jednak, musi być trochę hałaśliwe.

Gdy odczuliśmy już gorzki smak zbliżającej się matematyki, uwierzmy, że nasz wykład będzie na poziomie

elementarza. Zakładamy, że nasze wiadomości matematyczne mieszczą się w granicach najprostszej arytmetyki. Jeżeli jednak są to za duże wymagania, to miłosierdzie nakazuje poprosić o zamknięcie tej książki.

## Sekciarskie uwagi o metodzie

Na ogół teoretyczna analiza zjawisk poważnie się komplikuje, jeśli rozpatrywane zjawiska dotyczą ludzi. Niewielkie osiągnięcia nikną wobec gorących protestów i twierdzeń, że zadanie jest nadmiernie trudne. Dążenie do prostej teorii (pod prostą teorią rozumie się szereg aksjomatów i praw przekształcania w mniej lub bardziej ilościowym przybliżeniu) jest dziełem amatorów — zwykle uczonych fizyków. Uczeni zajęci zawodowo badaniem człowieka i jego działalności często traktują tych amatorów jak zbyt wcześnie rozwinięte dzieci, nie rozumiejące prawdziwej złożoności człowieka i jego czynów, patrzące niewinnymi oczami i wyobrażające sobie, że ich dziecinne szabelki będą porażać żywe smoki tak samo, jak i nieżywe. Ponieważ Uczeni Zajmujący Się Teorią Gier należą oczywiście do grupy takich dzieci, łatwo przewidzieć, że obecnie wypowiemy parę uspokajających uwag i to — według wszelkiego prawdopodobieństwa — kosztem zawodowców; inaczej bowiem nie podjęlibyśmy tej kwestii.

Dla Teoretyka Gier głównym motorem napędowym nie musi być nieznajomość prawdziwej złożoności sytuacji konfliktowych, w których bierze udział człowiek. Jego pewność, czy nawet brawura w ich rozwiązywaniu pochodzą z uświadomienia sobie, że problemy świata nieożywionego dawno pozostawiły w tyle jego i jego metodę. Nie mógł rozpocząć badań patrząc przez mikroskop i równocześnie zachowując szerokie pole widzenia; bogactwo szczegółów i złożoność ich układu były przygniatające. Ale ponieważ może poszczycić się pewnymi osiągnięciami, nasz uczony ma nadzieję, że owo bogactwo i złożoność nie mogą skompromitować całkowicie jego metod.

Zdaje sobie sprawę także, że jego osiągnięcia są spora-




dyczne a wiedza znacznie mniej doskonała, niż to wydaje się niewtajemniczonym nowicjuszom, tzn. oczywiście tym, którzy myślą, że zbadać świat ożywiony jest dużo trudniej niż nieożywiony, ponieważ ten ostatni poznano tak doskonale (!). Przecież współcześni fizycy mają jedynie bardzo mgliste poglądy na temat niektórych cząstek elementarnych (co nie przeszkodziło im stworzyć bombę atomową). Ich ulubiona cząstka — elektron — okryta jest tajemnicą: nie umieją odpowiedzieć nawet na elementarne pytanie, gdzie się on w danej chwili znajduje i jednocześnie w jakim kierunku się porusza, co gorsze — doszli do przekonania, że nigdy nie będą mogli dać dokładnej odpowiedzi. Matematycy też mają swoje słabe punkty. Na przykład, po stuleciach wysiłków nie wiedzą wciąż, jaka najmniejsza liczba kolorów potrzebna jest do narysowania mapy geograficznej tak, aby sąsiednie kraje nie były pomalowane tym samym kolorem. Gwoli sprawiedliwości trzeba dodać, że podejrzewają iż liczba ta równa jest czterem, lecz nie dowiedli tego.

W ostatnim stuleciu fizycy dodali do swego kołczanu





nową strzałę: statystykę matematyczną, dotychczas tylko narzędzie pomocnicze w boju. Obecnie zaczęli znajdować dla niej coraz ważniejsze zastosowania i są oznaki, że jej rola jako metody badania świata ożywionego będzie wzrastać. Teoria Gier ma z nią wiele wspólnych punktów. Najstarszym dowodem potęgi metod statystycznych i możliwości jej zastosowań jest obliczanie rocznego rozkładu wypadków śmiertelnych w armii pruskiej spowodowanych wierzganiem koni [4]. Jeśli powiecie, że zachowanie się koni jest łatwiejsze do odgadnięcia niż zachowanie się ludzi, to zdradzimy wam w sekrecie, że metoda ta da się z równym powodzeniem zastosować do rozkładu ilości śmiertelnych wypadków wśród koni zajeżdżonych przez Prusaków. Problemy ubezpieczenia są doskonałym przykładem zastosowania teorii statystycznej do niektórych aspektów życia ludzkiego; bilansy firm ubezpieczeniowych to piękny dowód jej osiągnięć. Nie jest prawdą, że ludzkich poczynań nie sposób przewidzieć.

Czego więc mamy prawo oczekiwać od Teorii Gier? Niewątpliwie jest zbyt prosta, by ogarniać wszystkie strony dowolnej sytuacji wojennej, ekonomicznej i społecznej. Z drugiej strony, jest dostatecznie ogólna, aby oświetlić szereg krytycznych aspektów wielu ciekawych sytuacji konfliktowych.

Teraz musimy zająć się paroma ważnymi sprawami. Po pierwsze — rozwijać dalej teorię, by można było rozwiązywać trudniejsze i bardziej różnorodne zagadnienia,

obowiązek ten spada na uczonych. Drugie — znaleźć takie sytuacje, do których można byłoby skutecznie zastosować istniejącą już teorię. Jednym z zadań tej książki jest zwiększenie liczby ludzi zorientowanych w elementach teorii i mogących zastosować teorię do problemów spotykanych we własnej pracy. (Szczególnie uparci Czytelnicy będą mogli sami formułować i rozwiązywać proste zadania.) Naszym celem jest także podanie pewnych danych z dziedziny stosunków międzyludzkich, aby udoskonalić podstawy teorii.

## Gracze i ludzie

Przejdźmy wreszcie do Teorii Gier. Rozpoczniemy od rozpatrzenia pokera i będziemy zajmować się nim tak długo, aż zapoznamy się z pojęciami i terminami, którymi będziemy się posługiwać w całej książce. Ty, Czytelniku, i twoi czterej partnerzy wciąż jeszcze siedzicie przy stole z talią kart, pewną sumą pieniędzy lub innymi wartościowymi rzeczami, przyjąwszy z góry ustalone reguły przewidujące wszelkie możliwe sytuacje. Reguły wskazują, jak należy dawać karty, kto i kiedy może obstawiać, jaka jest wartość poszczególnych kombinacji przy otwarciu kart i co się dzieje z bankiem.

Jedna z oczywistych cech danej sytuacji to, że gra jest pięciosobowa. Jednakże oczywiste nie musi być prawdziwe: dwóch graczy może przed rozpoczęciem gry utworzyć koalicję, umawiając się dzielić na połowę wszystkie wygrane i przegrane. Jeśli tak zrobili, to rozsądnie będzie sądzić, że — na ile pozwolą im okoliczności — będą grać we wspólnym interesie. Tak więc, jeśli jeden z uczestników koalicji zobaczy, że jego partner ma duże szanse wygrania przy otwarciu, to uczyni wszystko, co w jego mocy, aby mu pomóc. Jeśli jest tylko dwu graczy, którzy nie spasowali, to może on nawet pasować, aby pokazanie kart wypadło na gracza, który nie wchodzi do koalicji. Może on także przebić stawkę, by podwyższyć bank, nawet w przypadku, gdy nie ma szans na wygranie własnymi kartami. Krótko mówiąc, uczestnicy koalicji będą postępować tak, jak jeden gracz z dwoma głowami.

Gdy dwaj gracze utworzyli koalicję, wygodnie będzie — rzecz jasna — uważać, że w grze udział bierze nie pięciu lecz czterech graczy. Stąd wniosek, że znaczenie ma *ilość grup o przeciwstawnych interesach* a nie liczba osób siedzących przy stole. Zgodnie z tą zasadą brydż jest grą z dwoma graczami, ponieważ występują tu dwie grupy interesów. Zwróćmy uwagę, że słowo „gracz" w tym sensie, w jakim go używamy, służy dla oznaczenia zarówno osób prawnych i organizacji, jak i zwykłych ludzi.

Pokera możemy rozpatrywać jako grę parzystą, czyli grę z dwoma graczami, w której Czytelniku jesteś jednym z graczy, a pozostali czterej partnerzy — drugim graczem. Jeśli oni nie patrzą na to zagadnienie tak samo, to nie wyciągną korzyści z wymyślonego dla nich związku, a ty, Czytelniku, nie poniesiesz żadnych strat. Będzie to podobne do koalicji ze słabymi więzami wewnętrznymi lub też do koalicji posiadającej jakąś wadę, która psuje jej efektywność.

Liczba graczy lub, dokładniej, liczba grup interesów występujących w grze, jest jedną z podstawowych charakterystyk teorii gier. Od tej liczby zależy cały charakter sytuacji i sposoby jej badania. Istnieją trzy możliwości, które należy odróżniać: jeden, dwóch i więcej niż dwóch graczy.

Przykładem gry z jednym graczem jest układany dla rozrywki pasjans, w którym my jedynie bierzemy udział. Nawet jeśli będziemy płacić po dolarze jakiemuś osobnikowi, który zechce — być może — płacić nam po pięć dolarów za kartę ułożoną w odpowiednim miejscu, to i w tym przypadku nic się nie zmieni: w analizie uwzględnić trzeba tylko zdarzenia przypadkowe, a nie ruchy rozumnego przeciwnika. Z punktu widzenia Teorii Gier, ten typ gry nie jest interesujący. Rozwiązanie jest tu zupełnie jasne, przynajmniej w zasadzie: wybiera się po prostu optymalny sposób działania i postępuje się według tego planu. Jeśli istnieją zdarzenia przypadkowe (losowe) wybiera się metodę dającą przeciętnie najwięcej korzyści. Narażamy się na słuszny zarzut, że opuszczamy w ten sposób bardzo dużo praktycznych trudności.

Jednak gry z jednym graczem (włączając pasjansa)

można rozpatrywać jako specjalny rodzaj gier z dwoma graczami, w którym my jesteśmy jednym graczem, a Natura — drugim. Ten z punktu widzenia może okazać się bardzo użyteczny, nawet jeśli nie wierzymy, że Natura jest złośliwą istotą, której w głowie tylko to, by nas zgnębić. Na przykład, możemy nie dość dokładnie znać „przyzwyczajenia" Natury, gdy wybieramy sposób zabezpieczający największe zyski; może też zdarzyć się, że znamy kruczki Natury, lecz nie wiemy, jak i kiedy je stosuje. W tym przypadku Teoria Gier ma jednak coś do powiedzenia: doprowadzi do najbardziej ekonomicznej, ostrożnej gry, jak to zobaczymy poniżej.

Bardzo interesująca jest prawdziwa gra we dwoje. Spotykamy się z nią często w życiu, jej rozwiązanie jest często możliwe zarówno koncepcyjnie, jak i technicznie. Jest zwykłą sytuacją konfliktową. Przeciwnik, jak należy sądzić, jest inteligentny i chce nas pokonać. Jeśli wybraliśmy pewien sposób działania, który uważamy za wygodny, przeciwnik może odkryć nasze plany, przygotować zasadzkę i wyciągnąć dla siebie zyski z naszego szczegółowego wyboru. Wiele sytuacji, które — mówiąc ściśle — nie są grami z dwoma graczami, można rozpatrywać z tego punktu widzenia. Przykładem poker z pięcioma graczami; w tej grze można przyjąć, że wszystkie interesy osób siedzących przy stole dzielą się na dwie części — nasze i pozostałych. Większa część tego, co zrobiono do dzisiaj w Teorii Gier, dotyczy gier parzystych.

Jeśli liczba różnych graczy, tj. grup interesów, jest większa od dwóch, wówczas pojawia się nowa jakość. W procesie gry może zmieniać się skład grających w miarę, jak tworzą się i rozpadają czasowe koalicje lub też niektórzy gracze mogą tworzyć w określonym stadium gry stałą koalicję, jeśli jest im tak wygodniej. Może to się zdarzyć także w pokerze i w ten sposób zmodyfikować nasz pogląd na pokera, jako grę



z dwoma graczami. Mogę np. połączyć się z pozostałymi graczami, nieoficjalnie lecz skutecznie, przeciw jednemu graczowi, któremu specjalnie sprzyja szczęście. Mogę bowiem obawiać się, że odejdzie on od gry zabierając wszystkie pieniądze, lub też zechcę, żeby wygrał także ten, któremu nie bardzo się szczęści. Nasza wiedza o grach z liczbą graczy większą niż dwu jest znacznie mniejsza niż w dziedzinie gier parzystych. Jest to problem bardzo skomplikowany i wychodzi poza skromne ramy niniejszej książki.

## Wypłata

Przypomnijmy, że liczba graczy, którzy biorą udział w grze (rozumiejąc pod „graczem" określoną grupę interesów), jest jednym z ważnych kryteriów klasyfikacji i badania gier. Innym kryterium jest wypłata. Co się dzieje na końcu gry? Co się dzieje na przykład pod koniec rundy pokera? Zazwyczaj dochodzi do wymiany dóbr. Jeśli graczy jest dwóch, powiedzmy Ty (Niebieski) i ja (Czerwony), to jeśli Ty wygrałbyś 10 dolarów, to ja przegrałbym te 10 dolarów. Innymi słowy:

Wygrana Niebieskiego = przegranej Czerwonego, lub też

Wygrana Niebieskiego — przegrana Czerwonego = 0.

Możemy napisać to jeszcze inaczej:

Wypłata Niebieskiego + wypłata Czerwonego = 10 dolarów — 10 dolarów = 0, jeśli umówić się, że wygrane to liczby dodatnie, a przegrane — ujemne.

Nie zawsze okazuje się, że suma wypłat jest równa zeru. Jeśli na przykład gracz, który rozbił bank, musi oddać 10% wygranej na libację lub też na inne okoliczności (np. łapówka dla policjanta na rogu ulicy), to w tym przypadku suma wypłat nie jest równa zeru. Naprawdę:

wypłata Niebieskiego + wypłata Czerwonego = 9 dolarów — 10 dolarów = — 1 dolar.

Przytoczone powyżej dwa wypadki ilustrują zasadniczą różnicę między grami: jest bardzo ważne, czy suma wypłat wszystkich graczy jest równa czy nierówna zeru, jeśli uważa się wygrane za wypłaty dodatnie, a przegrane za ujemne. Jeśli ta suma równa jest zeru, to grę nazy-



wamy *grą z zerową sumą*. Jeśli nie jest równa zeru, to gra zwana jest (matematycy czasami nie grzeszą fantazją) *grą z sumą niezerową*. Znaczenie tej różnicy łatwo zauważyć. W grze z zerową sumą mamy do czynienia z dobrym, jasnym, zamkniętym układem, obaj gracze i wartości znajdują się w jednym pokoju. Niezbędny będzie oczywiście pewien wysiłek, aby zrozumieć i rozwiązać taką grę. Gra z sumą niezerową zawiera wszystkie trudności gry z sumą zerową plus dodatkowe nieprzyjemności związane z koniecznością uwzględniania nowych czynników. Te nowe czynniki można uwzględnić przez dodanie fikcyjnego gracza — znowu Naturę lub — powiedzmy — policjanta, Wówczas mamy

wypłata Niebieskiego = 9 dolarów

wypłata Czerwonego = − 10 dolarów

wypłata policjanta = 1 dolar

Czyli:

wypłata Niebieskiego + wypłata Czerwonego + wypłata policjanta = 9 dolarów − 10 dolarów + 1 dolar = 0

co jest w pewnym sensie grą z trzema graczami i z zerową sumą, przy czym rola trzeciego gracza przypomina rolę kamienia młyńskiego zawieszonego u szyi. Gry z trzema graczami nie budzą w nas takiej sympatii, jak gry parzyste, między innymi dlatego, że istnieje w nich zawsze groźba tworzenia koalicji. Tych trudności nie ma w grach z sumą zerową, szczególnie, jeśli są grami parzystymi.

Gry salonowe, takie jak poker, brydż czy szachy — są zwykle grami z zerową sumą. Wiele innych sytuacji konfliktowych można także uznać za gry z zerową sumą. Większość osiągnięć teorii gier jest dzisiaj związana właśnie z grami tego typu. W dziedzinie gier z niezerową sumą zrobiono już i robi się nadal sporo, omówienie tych gier przekracza jednak ramy naszej książki. Przykrym przypadkiem, o szczególnym znaczeniu, jest gra parzysta, w której nominalnie jednakowe wypłaty mają różną wartość dla różnych graczy; zdarza się to przecież nawet w grach salonowych.

## Strategie

Słowo „strategia", podobnie jak słowo „gracz", ma w teorii gier znaczenie nieco odmienne od potocznego. W codziennym życiu słowo to oznacza specjalnie chytry i pomysłowy plan, podczas gdy w teorii gier oznacza dowolny, *pełny* plan. Strategia jest planem na tyle pełnym, że nie może go zmienić działanie przeciwnika lub Natury, ponieważ wszystko, co może przedsięwziąć przeciwnik lub Natura wraz z zespołem naszych możliwych działań, jest częścią strategii.

A więc, strategia w teorii gier różni się od strategii w zwykłym sensie w dwóch ważnych punktach: po pierwsze, musi być zupełnie pozbawiona luk, po drugie — może być absolutnie zła; nie wymaga się od niej bowiem niczego prócz „kompletności", pełności. W pokerze wszystkie strategie winny przewidywać możliwość, że mamy w ręku pokera pikowego, a niektóre z nich będą żądały, żebyśmy od razu pasowali. Te ostatnie nie są strategiami nad wyraz błyskotliwymi, tym niemniej są strategiami (ostatecznie pewien brydżysta zalicytował „szlema w bez atu" mając ną ręku trzynaście pików). W grze, którą udaje się w pełni zanalizować, możemy w zasadzie — jeśli nie faktycznie — przewidzieć wszystkie możliwości i dlatego możemy sklasyfikować wszelkie możliwe strategie.

Teraz kolej na jeszcze jedno kryterium klasyfikowania gier: ilość strategii, które są w dyspozycji każdego gracza.

Tak, jeśli Niebiescy mają trzy strategie, zaś Czerwoni — pięć, to gra nazywa się 3 × 5 („trzy razy pięć").

Gdy mówiliśmy o liczbie graczy, wymieniliśmy pewne iczby — jeden, dwa i ponad dwa jako szczególnie ważne. Analogicznie można rozróżniać krytyczne liczby strategii. Ważne jest, by wyróżnić dwie kategorie. Do pierwzej należą gry, w których gracz dysponujący największą iczbą strategii ma ich jednak skończoną ilość, tzn. może e wyliczyć i zakończyć wymienianie ich w ramach pewego okresu czasu. Do drugiej kategorii należą te gry, v których co najmniej jeden gracz ma do dyspozycji ieskończenie wiele strategii, lub, jeśli słowo „nieskońzenie wiele" straszy, w których co najmniej jeden z grazy ma liczbę strategii większą od dowolnej określonej iczby, którą możemy sobie wymyślić (nawiasem mówiąc, natematycy właśnie to rozumieją pod „nieskończenie vielką liczbą").

Chociaż gry nieskończone (tak nazywa się tę ostatnią ategorię gier) zawierają wiele interesujących i pożyecznych zastosowań, teoria ich jest trudna. Istnieje co ajmniej parę jej problemów, których matematycy nie imieją rozwiązać, a my nie wiemy, jak opowiedzieć nich w przyjaźnie pedagogicznych wywodach tej książi. Analiza takich gier wymaga stosowania matematyki a poziomie rachunku różniczkowego lub wyższym, o wiele vyższym. Dlatego zadowolimy się grami skończonymi.

W następnych rozdziałach odróżnimy trzy rodzaje gier kończonych: takich, w których gracz mający najmniejszą lość strategii, ma ich dokładnie dwie, dokładnie trzy ub też więcej niż trzy. Oprócz tego ze względu na pracę, rud i warunki życiowe zwrócimy specjalną uwagę na ry z ilością strategii przewyższającą dziesięć.

## Macierz wypłat

Teraz możemy przystąpić do uzupełnienia opisu gier, o znaczy sytuacji konfliktowych, w formie wymaganej la analizy metodami teorii gier. Przypomnimy wszystkie vymienione poprzednio ograniczenia po to, żeby skiero-




wać dalszy wykład już na tę klasę gier, która będzie badana na stronicach tej książki. Zajmować się więc będziemy przede wszystkim grami skończonymi, parzystymi z sumą zerową.

Graczami będą Niebieski i Czerwony. Każdy z nich ma parę możliwych strategii; ponumerujemy je dla łatwiejszego odróżnienia. Strategie Niebieskiego będą się nazywać Niebieski 1, Niebieski 2 itd., w szczególnym przypadku aż do Niebieski 9. Strategie Czerwonego nazywają się Czerwony 1 aż do Czerwony 5. Taką grę nazwiemy grą 9 × 5 („dziewięć razy pięć") i rozpatrzymy na przykładzie gry, którą można zrealizować na przedstawionej mapie dróg.

Prawidła gry wymagają, aby Niebieski poruszał się na przedstawionym na mapie układzie od punktu *N* do punktu *C*, nie powracając z powrotem do punktu *N* i nie przechodząc dwukrotnie przez jeden i ten sam odcinek drogi; Czerwony natomiast powinien podążać od punktu *C* do punktu *N*, poruszając się zawsze na zachód. Możliwe, że Niebieski nie zechce się spotkać z Czerwonym i że jest mniej skrępowany nakazami. Łatwo sprawdzić, że Niebieski ma 9 możliwych dróg, Czerwony zaś 5.[5]

Prawidła powinny także informować, co nastąpi przy

końcu każdej rozgrywki: jaka będzie wypłata, jeśli — powiedzmy — Niebieski zastosował strategię Niebieski 7, zaś Czerwony strategię Czerwony 3. Istnieje $9 \times 5 = 45$ takich par, tak więc 45 możliwych wartości wypłaty i trzeba je wszystkie znać. Jakie by nie były wartości, całą tę informację można zapisać w postaci następującego buchalteryjnego formularza:

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | | | | |

Taka tablica z kratkami, w których podane są wypłaty, nazywa się *macierzą wypłat*. Umówimy się, że liczby dodatnie w kratkach oznaczają wygraną Niebieskiego, a zatem przegraną Czerwonego, i na odwrót. Jeśli w macierzy mamy liczby: 3 i −8, jak pokazano na rysunku, tzn. że, jeśli Niebieski stosuje strategię Niebieski 6, zaś Czerwony strategię 4, to Niebieski wygrał 3 jednostki, natomiast jeśli strategia Niebieski 2 zostanie zastosowana przeciw strategii Czerwony 2, Czerwony wygrywa 8 jednostek.

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | −8 | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | 3 | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | | | | |

Po zapisaniu problemu w tej postaci można rozpocząć analizę na podstawie teorii gier, ponieważ cała istotna informacja przedstawiona jest za pomocą opisów strategii, których symbole wymienione są po bokach macierzy i wartości wypłat (elementów macierzy) umieszczonych w jej kratkach. Tak właśnie wygląda model konfliktu stosowany w teorii gier i wartość analizy zależy całkowicie od tego, na ile ta forma przedstawienia gry — wybór strategii i macierz wypłat — odpowiada rzeczywistości.

## Milczące założenia

Ostatnie twierdzenie należy chyba objaśnić nieco dokładniej. Skoncentrujmy przez chwilę naszą uwagę na dwu skomplikowanych obiektach. Pierwszym z nich będzie realna sytuacja konfliktowa Niebieskiego i Czerwonego. Zawiera ona prawa, reguły, tabu, właściwie wszystko, co rzeczywiście działa w życiu — zawiera prawdziwe pobudki graczy, czynniki geograficzne — wszystko, co ma znaczenie dla rzeczywistej gry. Drugi obiekt jest także realny, lecz znacznie prostszy: to prawidła, które zapisaliśmy, strategie, które wyliczyliśmy i opisaliśmy na papierze, sporządzona macierz wypłat. Między tymi dwoma obiektami istnieje związek i to — mamy nadzieję — związek istotny. Drugi obiekt — znaki na papierze — jest abstrakcją pierwszego. Możemy odkryć pewne, bynajmniej nie oczywiste, własności drugiego obiektu, stosując metody teorii gier, i własności te mogą mieć pewną wartość dla pierwszego obiektu — rzeczywistej gry. Wszystko będzie zależało od tego, na ile trafna jest nasza abstrakcja. Głównym tematem tej książki będzie zbadanie, jak teoria gier radzi sobie z drugim obiektem, z modelem abstrakcyjnym. Pojawiające się przy tym trudności i problemy są w zasadzie techniczne, a nie teoretyczne. To problemy pomysłowości przy operowaniu złożonymi problemami matematycznymi bądź zagadnienia znalezienia środków celem uniknięcia ciężkiej pracy; ogólnie mówiąc, jest to gimnastyka przyrządowa na wyższym poziomie. Zanim przejdziemy do stosunkowo mil-

szego spędzenia czasu, powinniśmy nadmienić, że wszystko stało się teraz łatwe dzięki temu, że prześlizgnęliśmy się już ponad wielu prawdziwymi trudnościami natury koncepcyjnej.

Z jedną taką trudnością spotykamy się, gdy próbujemy wypełnić komórki macierzy wartościami wypłat. Jest to krytyczny punkt teorii gier, ponieważ dotyczy możliwości jej zastosowania do konfliktowych sytuacji realnego życia. I choć w dalszym ciągu napotykać będziemy przypadki, kiedy żądania nie są nadmiernie rygorystyczne, to na ogół musimy przyjąć, że wypłata może być zmierzona w zasadzie za pomocą liczby, że wiemy, jak ją mierzyć, i że zmierzyliśmy ją z wystarczającą dokładnością. Jednostki i pomiary muszą być takie same we wszystkich kratkach i muszą mieć proste wymiary. Innymi słowy, nie wolno wstawiać dolarów w jednej kratce, gramów uranu w drugiej i ludzkiego życia w trzeciej, oczywiście dopóty, dopóki nie zdarzy nam się poznać kursu wymiennego tych obiektów i dopóki nie będziemy mogli uwolnić się od różnorodności jednostek pomiaru. Jeśli wypłata w każdej kratce zawiera parę liczb wyobrażających różne przedmioty: trochę dolarów, pewną ilość uranu i pewną liczbę ludzkich istnień, będziemy ciągle w kłopotach, z wyjątkiem przypadków specjalnych. Ta trudność może powstać także w zwykłej grze. Rozpatrzmy np. grę między dwoma mistrzami. Stawkami w tej grze będą sumy pieniędzy i prestiż. Jeśli nie mamy „kursu wymiennego" między pieniędzmi i prestiżem, to nasza analiza będzie prawdopodobnie utrudniona.

Druga zasadnicza trudność związana z realnymi zadaniami dotyczy dostatecznie pedantycznego sformułowania zagadnienia, by możliwe było wymienienie wszelkich możliwych poczynań graczy. Należy przy tym unikać wykluczenia z warunków zadania ważnych wpływów otoczenia.

Inne niebezpieczeństwa będziemy sygnalizować od czasu do czasu w następnych rozdziałach, gdy nasze rozumowanie natrafi na jakąś podwodną skałę. Nie wolno jednak przeginać pałki i w drugą stronę — po to, by model był użyteczny, nie musi być absolutnie identyczny z sytu-

acją w realnym życiu. Zobaczymy, że pod tym względem w wielu wypadkach będziemy mieli znaczną swobodę.

## Kryterium

Odwieczną trudnością przy tworzeniu modeli matematycznych (w przeciwieństwie do drewnianych) jest choroba, którą można nazwać trudnością wyboru kryterium. Jakie jest to kryterium, za pomocą którego można wyprowadzić twierdzenie o pożądanym wyniku gry lub za pomocą którego takie twierdzenie powinno być wyprowadzone?

Dla zilustrowania obfitości kryteriów wystarczy najprostszy nawet przykład. Wyobraźmy sobie gospodynię domową, która chce kupić mięsa za 5 dolarów. Jakie mięso ma kupić? Jeśli kryterium jej stanowi ilość — to winna ona wybrać najtańszy rodzaj i mierzyć „wypłatę" w kilogramach. Jeśli różnorodność, powinna kupić najmniejsze potrzebne ilości paru rodzajów, począwszy od najtańszych, i mierzyć „wypłatę" ilością rodzajów zakupionego mięsa. Może także zwracać uwagę na zawartość białka, tłuszczu lub kalorii, albo może uwzględniać inne warunki, wynikające z takich ograniczeń, jak alergia, smak, tabu itp. Może chcieć zaoszczędzić sobie wysiłku przy przygotowaniu jedzenia, wtedy powie zapewne: „potrzebuję za 5 dolarów pieczonego mięsa. Proszę mi dostarczyć przy okazji".





Problem kryterium oznacza zatem: co mierzyć i jak zachowywać się na podstawie tych pomiarów. Teoria gier nie może nic powiedzieć na temat pierwszego zagadnienia, lecz daje jasne i określone rekomendacje dotyczące wzorca zachowania się na podstawie wykonanych pomiarów.

Twierdzi ona, że istnieje określona odpowiedź na pytanie, jakie powinno być zachowanie się rozumnych ludzi, jeśli wierzą w macierz wypłat. Pojęcie o określonym sposobie działania, któremu powinni podporządkowywać się ludzie, nie odnosi się do obowiązków opartych na zasadach prawa i etyki. Odnosi się raczej do specjalnej matematycznej moralności lub przynajmniej do zasady oszczędności, stwierdzającej, że *główny cel gracza polega na tym, aby bez ryzyka zdobyć jak największą wygraną w grze z doświadczonym przeciwnikiem, którego cel jest podobny*. Taki jest nasz model rozumnego zachowania. Jak to bywa z wszystkimi modelami, buty należy mierzyć w każdej nowej sytuacji, by przekonać się, czy są dostatecznie wygodne. Dobrze poinformowane koła wojskowe wiedzą jednak, że można dość daleko zajść również w źle dopasowanym obuwiu.

Prześledźmy, jakie będą rezultaty zastosowania tego modelu w grze z sumą zerową, czyli — jak pamiętamy — w zamkniętym układzie, w którym pieniądze przechodzą po prostu od gracza do gracza. Chyba nikt nie obrazi się (oprócz Czerwonego), jeśli założymy — na pewien czas dla uproszczenia naszego wykładu — że wszystkie wypłaty z macierzy gier są dodatnie. Oznacza to, że wszystkie dostępne graczom strategie będą wpływały teraz tylko na ilość pieniędzy oddanych na końcu gry Niebieskiemu przez Czerwonego. To jest oczywiście nieuczciwe w stosunku do Czerwonego, ale pozwolimy mu cierpieć dla dobra sprawy.

Według zasad teorii gier *Niebieski chce działać tak, by najmniejsza wygrana, którą może otrzymać, była możliwie największą bez względu na działanie Czerwonego;* zapewnia to bezpieczeństwo działania. Na odwrót: Czerwony stara się, aby uczynić tę sumę pieniędzy, którą musi oddać Niebieskiemu, możliwie najmniejszą, niezależnie od działania Niebieskiego. Ta filozofia — jeśli gracze trzymają się jej — jest wystarczająca, aby określić wybór ich strategii. Jeśli Niebieski zmienia swój wybór, ryzykuje, że otrzyma mniej niż mógłby otrzymać. Jeśli zaś Czerwony nie trzyma się swego wyboru — może być zmuszony zapłacić więcej niż początkowo przewidywał.

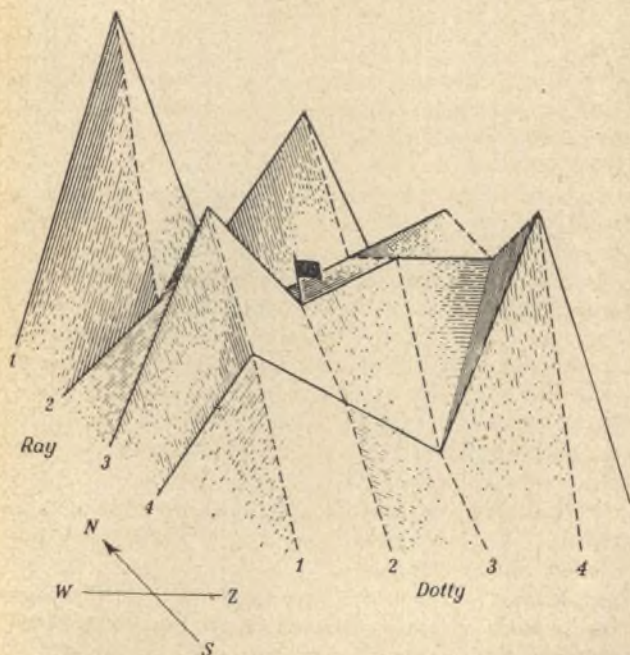
Powyższe rozumowanie jest centralną ideą teorii gier. Zawsze istnieje sposób działania, przy którym w dowolnej grze z dwoma graczami będzie spełnione rozpatrzone powyżej kryterium. Jednakże, podobnie jak w przypadku gospodyni domowej kupującej mięso, nie jest to na pewno jedyne możliwe kryterium. Można wymyślić wiele innych, przypisując, na przykład, przeciwnikowi różny stopień niewiedzy lub głupoty. Ponieważ teoria gier nie przypisuje przeciwnikowi tych miłych cech, jest teorią konserwatywną.

Zwróć uwagę, Czytelniku, na pozorne różnice celów Niebieskiego i Czerwonego: cele Niebieskiego dotyczą wygranej, cele Czerwonego — przegranej. Ta różnica jest tylko pozorna, ponieważ obydwaj gracze posługują się dokładnie takim samym rozumowaniem. Jest ona raczej rezultatem naszej umowy, jakie znaczenie mają dodatnie

i ujemne liczby w macierzy wypłat. Przyjęcie jednolitej konwencji, że Niebieski jest zawsze zainteresowany w maksimum, zaś Czerwony w minimum, zmniejsza niektóre techniczne trudności, lecz nie płaćmy za mnemotechniczne ułatwienie przekonaniem, że położenie Niebieskiego i Czerwonego nie jest symetryczne.

**Przykład 1 — Turyści:** W przyswojeniu sobie powyższych idei, pomoże nam pewien konkretny model. Jeśli wszystkie wypłaty są dodatnie, to przyjmijmy, że przedstawiają wysokości poszczególnych punktów w górzystej miejscowości. Różne strategie Niebieskiego i Czerwonego będą wówczas odpowiadać różnym szerokościom i długościom geograficznym tych punktów.

Aby wprowadzić do gry osoby i motywy ich postępowania założymy, że mąż i żona (nazwiemy ich Ray i Dot-



ty) postanowili udać się na wycieczkę. Ray lubi chodzić po górach, zaś Dotty woli niziny. Wybrany przez nich rejon poprzecinany jest siecią duktów lub dróg po cztery w każdym kierunku. Turyści umówili się, że rozbiją obóz na skrzyżowaniu dróg. Następnie postanowili, że Ray pójdzie drogą ze wschodu na zachód, a Dotty z północy na południe, a przecięcie tych dróg wyznaczy skrzyżowanie. Jeśli teraz nie uratuje ich teoria gier, to rozczarowanie ich zabije.

Punkty przecięcia na drogach, którymi może pójść Ray, znajdują się na następujących wysokościach (w tysiącach stóp):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ray | 1 | 7 | 2 | 5 | 1 |
| | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| | 3 | 5 | 3 | 4 | 4 |
| | 4 | 3 | 2 | 1 | 6 |

Jako człowiek rozumny, chcący oczywiście wyciągnąć, ile się da, ze swego zamierzenia, powinien on — rzecz jasna — wybrać drogę Ray 1, której skrzyżowania wypadają na wysokościach 7, 2, 5 i 1, ponieważ tylko na niej znajduje się szczyt wysokości 7 tysięcy stóp. Ale Ray od razu wie, że jest to „senne marzenie". Nie śmie podjąć planu, który byłby dla niego tak miły, lecz który mógłby doprowadzić do katastrofy, jeśli Dotty będzie dostatecznie mądrze wybierała swoją drogę. Odrzucając założenie, że Dotty może działać bezmyślnie, Ray musi w swoim własnym interesie zrezygnować z zapierających dech szczytów i zwrócić specjalną uwagę na nieciekawe dlań niziny i zejścia. W rezultacie tych badań wybiera drogę Ray 3, na której leży nizina „najwyższa" w tej okolicy, a mianowicie na wysokości 3 tysięcy stóp. Wybierając drogę Ray 3, może być pewien, że rozbiją obóz na wysokości co najmniej 3 tysięcy stóp; a może wyżej, jeżeli Dotty byłaby nieco mniej uważna.

Jednak żona — zgodnie z jego obawami — jest równie mądra w tych sprawach, jak on. Krytyczne wysokości, wypadające na jej drogach, wymienione są w tablicy:

*Dotty*

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | 7 | 2 | 5 | 1 |
| | 2 | 2 | 3 | 4 |
| | 5 | 3 | 4 | 4 |
| | 3 | 2 | 1 | 6 |

Po zbadaniu szlaków Dotty od razu pojęła, że nie warto tracić czasu na planowanie trasy szlakami Dotty 3 i Dotty 4, gdzie napotkałaby utęsknione głębokie doliny. Jest realistką, a więc bada wierzchołki na jej drogach i postanawia wybrać trasę z najmniejszymi wzniesieniami. W efekcie odnajduje drogę Dotty 2, gdzie obóz na wysokości 3 tysięcy stóp jest tym najgorszym, co ją może spotkać.

Staliśmy się świadkami czegoś w rodzaju uzgodnienia: Ray wybrał strategię Ray 3, która gwarantuje mu rozbicie obozu na wysokości 3 tysięcy stóp lub wyżej, zaś Dotty wybrała strategię Dotty 2, która zapewni jej odpoczynek na wysokości 3 tysięcy stóp lub mniej. Innymi słowy, każdy gracz mając przed sobą mądrego przeciwnika może zdobyć własnym wysiłkiem postój na wysokości 3 tysięcy stóp, a nawet osiągnąć rezultat lepszy, gdyby przeciwnik okazał się mniej zapobiegliwy.

Jeśli gwarantowane minimalne i maksymalne wypłaty dla Niebieskiego i Czerwonego są dokładnie równe, tak jak w powyższym przykładzie, mówimy wówczas, że gra ma *punkt siodłowy* i gracze powinni stosować strategie, które odpowiadają temu punktowi. Jeśli któryś z nich stosuje inną strategię niż określoną przez punkt siodłowy, to narazi się na niepotrzebne straty. Jeśli zaś obaj gracze będą stosować odmienne strategie wówczas sytuacja staje się zupełnie płynna i ktoś będzie jej ofiarą.

Zwróćmy również uwagę, że w przypadku występowania punktu siodłowego zachowanie tajemnicy staje się zbędne. Zarówno Ray, jak i Dotty mogą otwarcie powiedzieć o swoim wyborze (jeśli jest on właściwy), a przeciwnik nie może wykorzystać tej informacji, aby zmusić drugiego gracza do wybrania innego miejsca postoju niż na wysokości 3 tysięcy stóp.



Występowanie punktu siodłowego w teorii gier przypomina — jak już wspomniano — coś w rodzaju uzgodnienia. Punkt siodłowy odpowiada przełęczy lub kotlinie w górach, a prawie każdy skomplikowany łańcuch górski posiada wiele przełęczy. Jednakże przełęcz górska musi posiadać pewne specjalne cechy, aby można było uważać ją za punkt siodłowy w teorii gier. Po pierwsze, droga przecinająca przełęcz powinna iść w kierunku północ--południe, tj. powinna być dostępna dla gracza, który chce ponieść najniższy koszt. Po drugie — na północ i południe od przełęczy nie powinno być wyższych punktów. Po trzecie, na zachód i wschód od przełęczy nie powinno być niższych punktów. Te warunki są zupełnie niezbędne, ponieważ górska przełęcz jest *lokalnym* ukształtowaniem terenowym i wymagane są niektóre dodatkowe cechy, aby ten punkt wyróżniał się dodatnio w całej okolicy.

Mimo że na dalszych stronach będziemy badać gry z punktami siodłowymi, to — ogólnie rzecz biorąc — spotyka się je nie często. W grze 4×4, takiej jak rozpatrywana, mamy około jedną szansę na dziesięć, że macierz składająca się z liczb przypadkowych będzie miała punkt siodłowy.

W naszym przykładzie mała zmiana macierzy w jakimkolwiek punkcie może uniemożliwić wyznaczenie punktu

siodłowego. Jeśli, na przykład, zmienić wysokość przecięcia dróg Dotty 2 i Ray 4 z 2 tysięcy stóp na 6 tysięcy stóp, to charakter gry zmieni się zupełnie. W tej grze nasze podstawowe rozumowanie dotyczące wyboru strategii załamie się. Jeśli Ray rozumuje tak, jak uprzednio, to wybierze drogę Ray 3, gwarantującą obóz na wysokości 3 tysięcy stóp lub wyżej. Lecz Dotty, na podstawie poprzednich rozumowań, będzie musiała teraz wybrać drogę Dotty 3, która zapewni jej obóz na wysokości 5 tysięcy metrów lub mniej.

| | | Dotty | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Ray | 1 | 7 | 2 | 5 | 1 |
| | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| | 3 | 5 | 3 | 4 | 4 |
| | 4 | 3 | 6 | 1 | 6 |

Tak więc między trzema a pięcioma tysiącami stóp utworzyła się przepaść, w której sytuacja ucieka naszej kontroli. Intuicja może podpowiedzieć, że powinien istnieć sposób prowadzenia gry, który przerzuci most nad powstałą przepaścią. Istotnie tak jest, lecz my musimy rozpocząć nasze rozumowanie od sytuacji prostszych. Dodajmy tu, że dobre prowadzenie gry wymaga przestrzegania ostrzejszych reguł dotyczących zachowania tajemnicy, niż to było potrzebne przy grze z punktem siodłowym. Gracze powinni zwłaszcza o wyborze strategii informować jednocześnie lub w zaklejonych kopertach. A co powinni napisać w tych kopertach, to właśnie ów problem do rozwiązania.

# 2

# Gry z dwiema strategiami

## C z ę ś ć I: Gry $2 \times 2$

### Wprowadzenie

Dołożymy starań, by z techniką rozwiązywania gier zapoznać się możliwie najmniej boleśnie. Gra $2 \times 2$ jest chyba najodpowiedniejsza dla tego celu.

Przypomnijmy sobie jej warunki: gra sprowadzać się musi do macierzy wypłat, tj. prostokątnej (możliwie kwadratowej) tabeli liczb, której wiersze i kolumny odpowiadają różnym strategiom, osiągalnym dla gracza. I na odwrót: *każda* prostokątna tablica liczb może być rozpatrywana oczywiście jako macierz wypłat pewnej gry. Możemy także wymyślić grę, która miałaby taką właśnie macierz. Dlatego nieraz ograniczymy się do rozpatrzenia własności poszczególnych macierzy i wypływających z tych własności wniosków, nie martwiąc się o gry, które macierz przedstawia. Wyłączywszy w ten sposób treść gier zajmiemy się bez przeszkód problemami technicznymi.

Będziemy zawsze szukać *rozwiązań* dla gier. Znaczy to, że będziemy próbowali wykryć, jaką strategię lub jakie strategie gracze powinni stosować w przypadku, gdy zajdzie konieczność stosowania więcej niż jednej strategii, określimy kolejność ich stosowania; w praktyce bowiem w każdym danym momencie może być zastosowana tylko jedna strategia. Każda z gier, które będziemy rozpatry-

wać, ma rozwiązanie, a więc zawsze istnieje dobry sposób prowadzenia gry i możemy go znaleźć, jeśli tylko nie przestraszymy się niezbędnej pracy.

Zaczniemy od najprostszych macierzy wypłat i stopniowo spróbujemy znaleźć drogę do bardziej skomplikowanych. W tym rozdziale poświęcimy naszą uwagę przede wszystkim grom 2 × 2. Spotkamy się także z grami 2 × 3, 2 × 4 i praktycznie ze wszystkimi grami, w których jeden z dwu graczy ma tylko dwie strategie.

Umówmy się, że: strategie Niebieskiego będziemy umieszczać i numerować z lewej strony macierzy wypłat, zaś strategie Czerwonego u góry. Wszystkie wypłaty dotyczyć będą Niebieskiego, tzn. dodatnia liczba w komórce macierzy oznacza, że Czerwony ma zapłacić Niebieskiemu, zaś ujemna — że Niebieski płaci Czerwonemu. Przyjmijmy dla nas barwę niebieską. Wówczas dodatnie liczby będą oznaczać, że otrzymujemy wypłatę, ujemne zaś, że płacimy.

## Fluktuacje

Rozpoczniemy od prostego przykładu:

| | | *Czerwony* | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| *Niebieski* | 1 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 |

Liczby całkowite z lewej strony macierzy są po prostu numerami strategii Niebieskiego, tzn. dwoma możliwymi sposobami działania Niebieskiego w tej grze. Podobnie liczby u góry macierzy oznaczają pierwszą i drugą strategię Czerwonego. Liczby w kratkach mówią nam o dokonanych wypłatach, przy zastosowaniu odpowiednich strategii.

Nasza gra jest chyba najnudniejszą grą na świecie. W każdym razie jest grą uczciwą. Gracze nie mają żadnego wpływu na rezultaty, ponieważ w dowolnym wypadku, niezależnie od tego jakby się zachowywali — wypłata wynosi zero. Czyżby jednak tak było?

Prawda zawsze wyjdzie na wierzch: gdy opisywaliśmy w pierwszym rozdziale sposób wykonania macierzy wypłat, uprościliśmy ten sposób i z uproszczeniem tym zapoznamy się teraz przy badaniu gry $2 \times 2$.

W macierzy wymienione są wszystkie strategie Niebieskiego i Czerwonego. Lista jest wyczerpująca, tzn. wszystkie możliwe kolejne działania, genialne i głupie, przedstawione są za pomocą odpowiednich strategii. Czy wynika jednak z tego, że w każdej kratce macierzy może pojawić się tylko jedna liczba? Jaka jest rola zdarzeń losowych? Oczywiście zastosowanie jakiejś szczególnej strategii przez Niebieskiego, a innej przez Czerwonego nie gwarantuje, że wypłata będzie taka sama we wszystkich przypadkach. Gra może być, na przykład taka, że strategie graczy określają tylko to, czy wygra Niebieski, czy Czerwony, zaś wysokość wypłaty określa los, który kręci tarczę ruletki.

Co oznacza więc liczba zero w kratce macierzy? Bądź liczba 6, czy też 2, lub jakakolwiek inna? Może ona być wartością bardzo solidną; tj. jedynym możliwym rezultatem gry przy zastosowaniu odpowiedniej pary strategii. Lecz jeśli w grze przy określonych strategiach każdego gracza wypłata może być jakąkolwiek z paru liczb, wówczas liczba zapisana w macierzy jest średnią wartością wypłaty, której wysokość określa przypadek. Jest to rzeczywiście ważne; aby wszystko stało się jasne, rozpatrzmy przykład.

Założymy, że pewna para strategii prowadzi do trzech możliwych rezultatów: w jednym przypadku Niebieski wygrywa 8, w drugim Niebieski wygrywa 24, w trzecim Niebieski traci 8. Byłoby niesłuszne zapisywanie w odpowiedniej kratce macierzy wypłat liczby 8, która jest średnią wartością liczb 8, 24, $-8$, ponieważ Natura może mieć niejednakową sympatię do tych liczb. Jako mechanizm przypadkowy można np. wybrać podrzucenie monety i uważać, że liczba $+8$ (wygrana Niebieskiego) odpowiada wyrzuceniu orła, liczba $-8$ (przegrana Niebieskiego) reszki, zaś liczba $+24$ postawieniu monety na krawędzi. Posługując się współczesną cienką monetą,



można uważać ostatni przypadek za zupełnie nieprawdopodobny i odrzucić, zaś prawdopodobieństwa wyrzucenia orła i reszki uznać za jednakowe. Prawdziwą wartość średnią otrzymamy wówczas w rezultacie dodania + 8 i − 8 i podzielenia tej sumy przez 2, tzn. $\frac{8 \; -8}{2} = 0$. Tę wartość należy właśnie wpisać do macierzy. Jeśli natomiast podrzucana jest moneta, której grubość wynosi ok. 1/3 średnicy, to wówczas wyrzucenie orła, reszki i ustawienie monety na jej krawędzi są równie prawdopodobne: wtedy jako wypłata powinna być wpisana liczba $\frac{8+24-8}{3} = 8$. A więc, *ciężar gatunkowy liczb zależy od ilości przypadków sprzyjających pojawieniu się tych liczb.* Na przykład, jeśli perspektywy otrzymania liczb 8, 24 i − 8 mają się do siebie jak 1 : 3 : 4, to odpowiednia średnia wartość będzie równa

$$\frac{1 \times 8 + 3 \times 24 + 4 \times (-8)}{1+3+4} = \frac{8+72-32}{8} = 6$$

Znaleziona w ten sposób wartość średnia nazywa się *wartością oczekiwaną* lub *nadzieją matematyczną*. Termin ten wymaga specjalnego wyjaśnienia. Nie oczekujemy, że przy zastosowaniu danej pary strategii zawsze będziemy mieli wypłatę w danym przypadku równą 6. Na odwrót, wypłata taka nigdy faktycznie nie nastąpi w rezultacie jednej gry. Lecz oczekujemy, że średnia wartość wypłaty dąży do 6. Znaczenie wartości oczekiwanej można ocenić, gdy rozumuje się w następujący sposób: jeśli Niebieski chce grać z Czerwonym stosując daną parę strategii, to powinien otrzymać uprzednio sprawiedliwą wypłatę od Czerwonego równą 6. Jeśli wypłacona zostanie inna suma, to gra jest niesprawiedliwa dla jednego z graczy, który wówczas będzie przegrywał częściej niż powinien.

Nieco zgnębieni tą niezbędną dygresją powróćmy do macierzy.

| | | *Czerwony* 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| *Niebieski* | 1 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 |

Wiemy już, że za zerami w kratkach macierzy mogą kryć się zdarzenia losowe ze zmieniającymi się wygranymi i przegranymi. Wykorzystamy ten przykład dla zilustrowania pewnej słabości (lub ukrytego ograniczenia) teorii gier. Załóżmy, że w górnej prawej i niższej lewej kratce nie ma zdarzeń losowych, tak że odpowiednie wypłaty w każdej partii są dokładnie równe zeru. Załóżmy następnie, że zero w górnej lewej kratce jest rzeczywiście średnią wartością wypłaty, opartej na jednakowym prawdopodobieństwie zdarzeń losowych o wartości +1 i −1, zaś zero w dolnej prawej kratce jest średnią wartością dwóch jednakowo prawdopodobnych liczb + 1000 i −1000. Ponieważ kapitał gracza nie jest nieograniczony, może on — i słusznie — wystrzegać się strategii 2, która w ciągu jednej gry może doprowadzić go do ruiny i będzie wolał strategię 1. Tak więc, posługiwanie się przez nas wartościami oczekiwanymi (tzn. średnimi wartościami z wielu partii), mające na celu skrócenie opisu wpływu przypadku w grze, zawiera milczące założenie, że gracz może i chce przetrzymać chwilowe kaprysy losu.

A jeśli założenie to nie jest zgodne z faktami? Teoretyk Gier prawdopodobnie nie pomoże nam: powie on, że trudności dotyczą wyłącznie nas samych, a nie jego, zaś my popadliśmy w nieszczęście tylko dlatego, że byliśmy nieuważni przy wyznaczaniu wielkości możliwych zapłat i to już zupełnie nie jego rewir. Ponieważ uważamy pełną ruinę także za przypadek losowy, podobnie jak zwykłą przegraną, to oczywiście postąpiliśmy niesłusznie przy wyborze wypłaty, a mianowicie: przy określaniu jej realnej wartości dla graczy. Obliczając wypłaty jako jednostki pomiaru, można uwzględnić zarówno dolary, jak i ludzkie życia; tak czy inaczej znajdą się jakieś jednostki, umożliwiające nam obliczenia z wyeliminowaniem

niezmiernie męczącego i trudnego zagadnienia oceny i porównywania pojęć nieliczbowych. Do tego celu konieczne jest opracowanie takiej skali wartości, która najlepiej oddawałaby użyteczność i bezużyteczność różnych możliwych rezultatów gry dla danego gracza.

Jeśli uda się nam tego dokonać, to jest jednak mało prawdopodobne, by wypłaty Niebieskiego i Czerwonego pozostały takie same pod względem wielkości i przeciwne pod względem znaku, co jest wizytówką gier z sumą zerową. Stąd wnioskujemy: jeśli gracze wolą jedną wypłatę od innej przy jednakowej wartości średniej, to skale powinny być poprawione, a gdy to zrobimy, to gra nie będzie już chyba zwykłą wymianą dóbr, jak to było uprzednio. Innymi słowy, będzie prawdopodobnie grą z sumą niezerową, a jak mówiliśmy już przedtem — nasza wiedza w tej dziedzinie nie jest za duża.

Po tym, co powiedzieliśmy, można by sądzić, że teoria gier jest teorią słabiuteńką i niepełną. „Oczekiwana" wartość wygranej nie zawsze może być odpowiednią podstawą dla podjęcia decyzji i dla działania. I ten właśnie fakt zmusza nas z kolei do stwierdzenia, że nie mamy jako tako odpowiedniego układu dla porównywania pożądanych i niepożądanych rezultatów gry. W dodatku wszystkie te zagadnienia rodzą się akurat wtedy, gdy znajdujemy się na progu badań nad teorią gier, gdy chcieliśmy właśnie przystąpić do rozpatrzenia najprostszych gier z zerową sumą i dwiema strategiami. Ci Czytelnicy, którzy mają odwagę iść z nami dalej, przekonają się, że niezależnie od wszystkich słabości, teoria gier ma wiele interesującego i pożytecznego do powiedzenia.

W rozważaniach przyjmujemy, że gracz ma dostatecznie duże środki, by bronić się przed kaprysami losu, że oczekiwane wartości średnie mogą być cennymi przewodnikami w grze.

Rozpatrzmy teraz grę:

| | | *Czerwony* | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| *Niebieski* | 1 | 5 | 5 |
| | 2 | 5 | 5 |

Jeśli Niebieski stosuje strategię 1 przeciw strategii 2 Czerwonego, to Czerwony musi mu wypłacić 5 jednostek. Taka sytuacja powstaje przy dowolnym wyborze strategii. Dlatego ta gra niewiele różni się od poprzedniej. Istotna różnica polega na tym, że gra jest nieuczciwa dla Czerwonego. Byłaby grą uczciwą, gdyby Niebieski zgodził się płacić Czerwonemu 5 jednostek za każdym razem, gdy zaczynają nową partię. W tej grze, jak i w poprzedniej, nie ma oczywiście znaczenia, jaką stosuje się strategię, ponieważ niezależnie od wyboru strategii wypłata się nie zmienia. W tym przypadku wywiad (w sensie wojskowym) jest zupełnie zbędny, tzn. poznanie planów przeciwnika nie jest ani potrzebne, ani użyteczne. Przekonamy się dalej, że dotyczy to wielu gier, pod warunkiem iż gracze stosują dobre strategie.

Warto wtrącić w tym miejscu, że macierze takie, jak ta, którą rozpatrywaliśmy, są podobne do macierzy, które towarzyszą grom „na los szczęścia". W czystej grze „na los szczęścia" wypłaty nie tylko wydają się jednakowe, naprawdę są identyczne. To znaczy, jeśli wypłaty są wartościami oczekiwanymi, to wszystkie oparte są na tych samych liczbach i zdarzeniach losowych; jest to cecha odróżniająca je zdecydowanie od gier wymagających umiejętności, czyli od gier strategicznych, w których gracze mogą w pewnym stopniu wpływać na wynik gry.

Aby uniknąć wprowadzania pojęć nieznanych, nie będziemy przez pewien czas używali liczb ujemnych w macierzach wypłat. Takie gry są z zasady nieuczciwe w stosunku do Czerwonego, zmuszanego do ciągłego płacenia. Czytelnik może rozpatrywać te gry jako sytuacje, w które Czerwony wpada bez swojej woli, ale wpadając stara się przeprowadzić grę w sposób jak najekonomiczniejszy dla siebie; lub też jako sytuacje, w których Czerwony może żądać odpowiedniej rekompensaty, jeśli tylko wie, jak ją obliczyć.

## Punkty siodłowe

Przejdźmy teraz do gry, w której gracze mogą wybrać następujące strategie:

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 5 |
| 2 | 5 | 4 |

Przypomnimy podstawowe rozumowanie teorii gier: Niebieski chce wygrać jak najwięcej, lecz nie może liczyć na wspaniałomyślność Czerwonego. Dlatego też bada kolejno każdą swoją strategię, by poznać, ile może wygrać, nawet wówczas gdyby Czerwony zaglądał mu w karty. Zakłada, że jakąkolwiek strategię wybierze, Czerwony zawsze znajdzie najdogodniejsze dla siebie kontrposunięcie. Dlatego Niebieski wypisuje najniższe wypłaty, jakie mogą wyniknąć przy dowolnym wyborze strategii. A mianowicie:

| *Niebieski* | | | *Wiersze Min* |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 5 | 5* |
| 2 | 5 | 4 | 4 |

Wybiera z nich najwyższą (oznaczoną gwiazdką): 5 jednostek. Niebieski ma więc podstawy, by strategię 1 uznać za dobrą.

Czerwony także analizuje kolumny macierzy. Jego podejście — jest podobne do rozumowania Niebieskiego włączając nawet szacunek dla przeciwnika — z tym wyjątkiem, że chce odnaleźć możliwie najniższą wypłatę. Przy badaniu każdej ze swoich strategii dopuszcza, że Niebieski chce wygrać jak najwięcej, lecz nie może liczyć powiednie przeciwśrodki, które są do jego dyspozycji. Dlatego Czerwony wypisuje najgorsze, czyli najwyższe wypłaty, wynikające z użycia każdej strategii.

*Czerwony*

| 1 | 2 |
|---|---|
| 6 | 5 |
| 5 | 4 |
| 6 | 5* |

*Kolumny Max*

Obiera oczywiście najniższą wypłatę (oznaczoną gwiazdką): 5 jednostek. Tak więc, jeśli zastosuje swoją strategię 2, to jego straty nigdy nie będą większe niż 5.

Napotkaliśmy tu zbieżność, podobnie jak w przypadku z turystami: Niebieski i Czerwony znaleźli strategie, które gwarantują określoną wypłatę przy grze przeciw mądremu przeciwnikowi (w naszym przypadku 5 jednostek). I każdy z nich wie, że wypłata będzie dla niego bardziej korzystna (w porównaniu z 5 jednostkami), jeśli przeciwnik nie będzie grał rozumnie. Wiemy już, że taka sytuacja nazywa się *punktem siodłowym.*

Jeśli *największe z minimów w wierszach poziomych równe jest najmniejszemu z maksimów w kolumnach pionowych, to mówi się, że gra mu punkt siodłowy,* czyli gracze winni trzymać się strategii, które przecinają się w punkcie siodłowym.

Aby odnaleźć punkt siodłowy, każdy z graczy musi zbadać grę zarówno ze swojego, jak i z punktu widzenia przeciwnika. Wypisuje minimum z każdego wiersza i oznacza gwiazdką największe. Następnie wypisuje maksima z każdej kolumny i oznacza gwiazdką najmniejsze. Jeśli obie oznaczone liczby są równe, to gra ma punkt siodłowy i gracze powinni wybrać te strategie, które odpowiadają wyznaczonemu szeregowi i kolumnie.

## Strategie mieszane

Wypróbujmy na innej grze te czary, które doprowadziły nas do rozwiązania poprzedniego przykładu. Rozpatrzymy taką:

| Niebieski \ *Czerwony* | 1 | 2 | *Wiersze Min* |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 3 |
| 2 | 5 | 4 | 4* |
| *Kolumny Max* | 5* | 6 | |

Największa wartość minimum wierszy równa jest 4, co odpowiada strategii 2 Niebieskiego; jeśli Niebieski wybierze ją, to nie otrzyma nigdy wypłaty mniejszej niż 4 jednostki. Przy zastosowaniu przez Czerwonego jego strategii 1 najmniejsza wartość maksimów kolumn równa

jest 5; ta strategia gwarantuje Czerwonemu, że jego straty nie przewyższą 5 jednostek.

W tym przypadku nie ma punktu siodłowego i sytuacja jest niejasna. Niebieski może zagwarantować sobie wygraną nie mniej niż 4 jednostki, Czerwony jest przekonany, że nie przegra więcej niż 5 jednostek. Moglibyście powiedzieć, że dostatecznie dobrzy gracze mogą uzyskać te wartości, posługując się wyłącznie zwykłym zdrowym rozsądkiem. Rozpiętość między tymi wartościami, to teren łowów, gdzie mistrz ma szanse zebrać dodatkową zdobycz.

Rozpatrzmy ponownie sytuację Niebieskiego. Jeśli przyjmie strategię 1, to Czerwony może to wykryć i obniżyć wygraną Niebieskiego do 3 jednostek. Jeśli zaś wybiera strategię 2, to wygrana może zniżyć się do 4 jednostek. Jednakże na podstawie analizy sytuacji Czerwonego, Niebieski może wygrać przy końcu każdej partii bądź 5, bądź 6 jednostek zamiast 3 — 4 jednostek. Przy tym ma on — jak uprzednio — do dyspozycji tylko strategię Niebieski 1 i Niebieski 2.

Sam dylemat podpowiada rozwiązanie. Ponieważ Niebieski musi coś przedsięwziąć i ponieważ uparte stosowanie wciąż jednej i tej samej strategii pozwoliłoby Czerwonemu na uzyskanie nadmiernej korzyści, to Niebieski powinien rozpatrzeć pozostałą alternatywę: stosowanie dwu strategii. W każdej rozgrywanej partii będzie musiał stosować jedną z dwóch strategii, dlatego że — zgodnie z określeniem — każda strategia określa *pełny* przebieg działań i stosowanie jednej strategii wyłącza stosowanie drugiej. A więc, *Niebieski musi czasem stosować jedną strategię, czasem drugą*.

Innymi słowy, Niebieski potrzebuje jakiejś wielkiej, super-strategii, która jako swoje elementy składowe zawiera uprzednie strategie. Zgodnie z terminologią teorii gier, taka super-strategia nazywa się *strategią mieszaną*, zaś jej elementy — do tej pory nazywane przez nas po prostu strategiami — *czystymi strategiami*. Czysta strategia to jedna z ponumerowanych, która będzie obowiązywać w danej partii gry. Strategia mieszana kieruje wyborem czystych strategii.

Prawdopodobnie od razu zauważyliśmy, że podobny sposób działania może doprowadzić do sytuacji, w której niezbędne staje się stosowanie środków do zachowania tajemnicy. Przecież jeśli Czerwony dowie się, jaką strategię zastosuje rzeczywiście Niebieski, to może wyciągnąć z tego korzyść dla siebie. Zobaczymy później, że niezbędne środki do zachowania tajemnicy są dokładnie określone: Niebieski powinien trzymać w sekrecie decyzję o strategii, jaką chce stosować w każdej z przyszłych partii. *Może on jednak pozwolić Czerwonemu uzyskać pełną informację o uprzednich działaniach, a także o strategii mieszanej.* Jeśli jego strategia mieszana jest prawidłowa, to Czerwony nie może przeszkodzić Niebieskiemu w otrzymaniu tego, co gra zapewnia przeciwnikowi. To samo odnosi się oczywiście do sytuacji Czerwonego.

Założyliśmy, że nasz przeciwnik jest mądry. Tym ważniejsze jest, by nie dowiedział się, którą z czystych strategii chcecie zastosować w następnej partii. Istnieje znana metoda, będąca murowaną obroną przeciw takiemu przeciwnikowi, metoda niezawodna w granicach narzuconych przez sam charakter gry, a mianowicie, by *decyzja o wyborze strategii zależała całkowicie od jakiegoś odpowiedniego zdarzenia losowego.* Dlatego taki lub inny mechanizm losowy jest podstawową częścią dobrej strategii mieszanej. Przy tym przeciwnik nie może dowiedzieć się z góry, jakie będą nasze działania, ponieważ nasz sposób działania jest tak samo nieznany nam, jak i przeciwnikowi.

Powróćmy teraz do przykładu:

| *Niebieski* \ *Czerwony* | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 |
| 2 | 5 | 4 |

Załóżmy na chwilę, że strategię mieszaną Czerwonego określają rezultaty podrzucania monety: gracz wybiera pierwszą strategię, gdy wyrzucił orła, drugą zaś — gdy reszkę. Jeśli stosuje ją przeciw strategii 1 Niebieskiego, to Czerwony zapłaci za około połowę gier po 3 jednostki,

zaś za połowę po 6 jednostek. Dlatego „oczekiwana" wartość wypłaty, czyli jej wartość średnia, w ciągu pewnego czasu wyniesie:

$$\frac{1\times3+1\times6}{1+1}=4\frac{1}{2}$$

(Jedynki są tu odpowiednimi częstotliwościami stosowania czystych strategii, które w przypadku podrzucania monety wynoszą 1 : 1. Pomnożyliśmy każdą wypłatę przez względną częstotliwość stosowania strategii, przy której odpowiednia wypłata ma miejsce, dodaliśmy te iloczyny i podzieliliśmy przez sumę względnych częstotliwości.)

Spróbujmy teraz zastosować strategię mieszaną z podrzucaniem monety przeciw strategii 2 Niebieskiego. W tym przypadku średnia wypłata wyniesie — tak jak i poprzednio —

$$\frac{1\times5+1\times4}{1+1}=4\frac{1}{2}$$

Tak więc, kierując się przy podjęciu decyzji podrzucaniem monety, Czerwony może zapewnić sobie średnią wypłatę 4,5 jednostek bez względu na wybraną strategię Niebieskiego. Ten rezultat jest korzystniejszy dla Czerwonego niż przy wyborze pierwszej strategii, gdy musiał płacić 5 jednostek (przypominamy, że Czerwony chce płacić możliwie mało).

Pojęcie strategii mieszanych, wg których gracz powinien wybierać to jedną, to drugą czystą strategię, przy czym *decyzja w każdym poszczególnym przypadku winna być określona odpowiednim losowaniem*, jest jednym z podstawowych pojęć teorii gier. Powiedzmy od razu, że strategie mieszane leżą u podstaw większości gier i nie zdają egzaminu tylko w pewnych szczególnych przypadkach.

Może się wydawać, że stosowanie mechanizmu losowego przy wyborze działań jest czymś nieodpowiedzialnym, zwłaszcza gdy rezultaty gry mają ważne znaczenie. W rzeczywistości nie ma tu braku odpowiedzialności: owe przekonywające rozumowania, które powinny poprzedzać podjęcie decyzji, naprawdę je poprzedzają. Mechanizm

losowy pojawia się wówczas, gdy zadanie jest sformułowane, wypłaty naznaczone i obliczone względne częstotliwości kierujące mechanizmem przypadkowym, a tym samym wyborem strategii. Tak więc mechanizm losowy jest narzędziem naszej woli a nie naszym panem. Zaś fakt, że ostatecznym ogniwem w procesie podjęcia decyzji jest maszyna niezdolna do głębokiego myślenia, nie ma znaczenia. Bomba też nie jest zbyt mądrym narzędziem; prawdę mówiąc i bombardier może nieraz myśleć więcej o jakiejś blondynce niż o wyborze celu; jeśli prześledzić cały łańcuch zdarzeń w odwrotnym kierunku, to lepiej jest założyć, że gdzieś tam miała miejsce celowa działalność umysłowa.

## Częstotliwości

Gdy nieco później dowiemy się, jak określać strategie mieszane, będziemy wyrażać rezultaty w postaci względnych częstotliwości. Może, na przykład, okazać się, że Niebieski powinien stosować swoje dwie strategie z częstotliwością jak 8 : 5, co oznacza, że przez dłuższy czas stosuje strategię Niebieski 1 osiem razy na każde pięć zastosowań strategii Niebieski 2. Często jednak będziemy się gubić, jeśli nie ochrzcimy przedmiotu. Od tej chwili będziemy nazywali liczby, na które składają się względne częstotliwości, po prostu częstotliwościami. Tak więc, jeśli częstotliwości względne równe są 8 : 5, to mówiąc o liczbie 8 będziemy nazywali ją częstotliwością. Z matematycznego punktu widzenia pojęcie częstotliwości jest pomysłem szokującym, ponieważ częstotliwości względne 8 : 5 są równoważne względnym częstotliwościom 16 : 10 (lub 24 : 15, lub 4 : 2,5 itd.), co sugeruje, że częstotliwość 8 może być równoważna częstotliwości 16. Dlatego nie ma żadnego znaczenia, jaki sens przypisujemy częstotliwościom, a nikt nie będzie mógł udowodnić, że jest niepoprawne. Jednakże używanie tego słowa oznacza, że możemy mieć zamiar zestawić cały układ takich liczb, z zachowaniem pewnej skali porównawczej. Zagadnienie to zrodziło się przy obliczaniu względnych częstotliwości,

gdy obliczamy częstotliwości pojedynczo i nieraz musimy powoływać się na jedną z nich.

Dla wygody stosować będziemy częstotliwości zerowe, by zasygnalizować, że niektórych strategii nie będziemy używać. Tak 3 : 0 : 2 oznacza, że pierwsza i trzecia strategia powinny być stosowane zgodnie z względnymi częstotliwościami 3 : 2, podczas gdy drugiej strategii nie powinno się stosować.

## Zasady znajdowania częstotliwości

Nie mamy zamiaru przytaczać logicznego wywodu, jak znajdować odpowiednie strategie mieszane, ponieważ nie wiemy, jak tego dokonać bez pomocy matematyki. Przedstawimy jednak zbiór elementarnych reguł, umożliwiających obliczenie dobrej strategii mieszanej paroma prostymi, choć nieraz bardzo żmudnymi działaniami arytmetycznymi. Procedura obliczenia dla gry $2 \times 2$ jest następująca:

*Krok 1.* Sprawdźmy, czy gra ma punkt siodłowy. (Wystarczy porównać maksimum minimalnych wartości wierszy z minimum maksymalnych wartości kolumn i przekonać się, czy są sobie równe). Jeśli punkt siodłowy istnieje, to na tym praca się kończy i najlepszą strategią mieszaną jest czysta strategia; ta, przy której strategie Niebieskiego i Czerwonego przecinają się w jednym punkcie.

*Krok 2.* Jeśli gra nie ma punktu siodłowego, to najlepszą strategią jest strategia mieszana. Zapomnijmy o punkcie siodłowym i postępujmy wg następującego planu:

Najpierw zapoznamy się ze strategiami Czerwonego. Rozpatrzymy pierwszą i drugą strategię Czerwonego i macierz wypłaty (używamy liczb z ostatniego przykładu):

*Czerwony*

| 1 | 2 |
|---|---|
| 3 | 6 |
| 5 | 4 |

Odejmujemy od liczb pierwszego wiersza liczby drugiego wiersza i zapisujemy rezultaty w dwu kratkach nowej macierzy:

*Czerwony*

| 1 | 2 |
|---|---|
| −2 | 2 |

Częstotliwość stosowania strategii 1 znajduje się teraz w zakreskowanej kratce:

*Czerwony*

| 1 | |
|---|---|
| | 2 |

Częstotliwość stosowania strategii 2 znajdzie się w drugiej kratce, tej która zakreskowana jest tutaj:

*Czerwony*

| | 2 |
|---|---|
| −2 | |

Jedna z tych liczb będzie zawsze ujemna; nie zwracajmy uwagi na minus. Zapisane liczby przedstawiają stosunkowe częstotliwości stosowania przez Czerwonego jego strategii, czyli 2 : 2. To znaczy, że obie strategie powinny być stosowane z jednakowymi częstotliwościami w stosunku 1 : 1. Innymi słowy, Czerwony powinien wybierać strategie stosując mechanizm dający równe prawdopodobieństwa, np. podrzucanie monety.

Zwróćcie specjalną uwagę na ciekawą symetrię zakreślonych kratek: częstotliwość stosowania strategii 1 Czerwonego znajduje się nie w kolumnie Czerwony 1, lecz w kolumnie Czerwony 2.

Powyższa zasada określania względnych częstotliwości jest nieco bardziej skomplikowana, niż tego wymagają okoliczności. Lecz służy ona jako podstawa dla pewnych reguł, które będą nam potrzebne przy badaniu bardziej skomplikowanych gier. Z pedagogicznego punktu widzenia rozsądniej jest pomęczyć się trochę na etapie wstępnym. Reguły dla określenia optymalnych strategii Niebieskiego są takie same, z tą jedynie różnicą, że wszystko obracamy o 90°. Zilustrujemy to na tym samym przykła-

| Niebieski | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 |
| 2 | 5 | 4 |

dzie: Odejmijmy drugą kolumnę od pierwszej, to da:

| Niebieski | |
|---|---|
| 1 | −3 |
| 2 | 1 |

Wówczas liczba w tej zakreskowanej kratce

| Niebieski | |
|---|---|
| 1 | |
| | 1 |

i w niezakreskowanej

| Niebieski | |
|---|---|
| | −3 |
| 2 | |

wskazują częstotliwości stosowania pierwszej i drugiej strategii Niebieskiego. Niebieski powinien stosować strategię mieszaną, w której pierwsza strategia powinna być stosowana trzykrotnie rzadziej niż druga, tj. w stosunku 1 : 3.

W tej sytuacji podrzucanie monety nie daje Niebieskiemu tych względnych częstotliwości, jakich potrzebuje. W końcu tego rozdziału powrócimy do zagadnienia praktycznych mechanizmów losowych, które dawałyby każdą potrzebną częstotliwość względną.

Opisana metoda jest tak prosta, że istnieje pewne niebezpieczeństwo, że zostanie niedoceniona. Dla wprawy przytoczymy jeszcze jeden przykład

| | Czerwony | |
|---|---|---|
| Niebieski | 1 | 2 |
| 1 | 7 | 3 |
| 2 | 2 | 11 |

(To nie gra w kreps[6], chociaż liczby są podobne). Najpierw sprawdzimy punkt siodłowy:

*Czerwony*

| | | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* | 1 | 7 | 3 | 3* |
| | 2 | 2 | 11 | 2 |
| | | 7* | 11 | *Wiersze Min* |
| | | *Kolumny Max* | | |

Nie ma go oczywiście, bo liczby zaznaczone gwiazdkami nie są równe. Nie należy zapominać o sprawdzeniu punktu siodłowego; gdyby istniał, nasza praca na tym by się właśnie skończyła. Co ważniejsze, *metoda, którą używamy dla znajdowania strategii mieszanych, stosowana do gry z punktem siodłowym, daje zwykle błędne rezultaty.*

A teraz spróbujmy od nowa znaleźć mieszaną strategię dla Czerwonego.

*Czerwony*

| 1 | 2 |
|---|---|
| 7 | 3 |
| 2 | 11 |

Odejmując elementy drugiego wiersza od pierwszego, otrzymamy

*Czerwony*

| 1 | 2 |
|---|---|
| 5 | −8 |

i dowiadujemy się, że częstotliwość stosowania strategii Czerwony 1 określa liczba w tej zakreskowanej kratce

*Czerwony*

| 1 | |
|---|---|
| | −8 |

zaś częstotliwość Czerwony 2 w tej

*Czerwony*

| | 2 |
|---|---|
| 5 | |

Tak więc względne częstotliwości są 8 : 5 na korzyść Czerwony 1; Czerwony powinien stosować dwie strategie, 1

i 2 w stosunku 8 : 5. W analogiczny sposób znajdziemy, że Niebieski powinien stosować strategie Niebieski 1 i 2 w stosunku 9 : 4.

## Cena gry

Parokrotnie wspomnieliśmy, że w każdej grze istnieje pewna określona wypłata dla dobrego gracza grającego przeciw dobremu graczowi. Ta wypłata nazywa się *ceną gry*[7]. Nie można wygrać więcej niż wynosi cena gry, chyba że przeciwnik gra słabo. Jeśli wysokość ceny gry jest liczbą dodatnią, to oznacza sumę, którą Niebieski musi zapłacić Czerwonemu po każdej partii po to, by gra była uczciwa. Większość gier towarzyskich, które są uczciwe, mają cenę gry równą zeru.

W grze z punktem siodłowym cena gry równa jest wartości w pukcie siodłowym. Tak w grze

| | *Czerwony* 1 | *Czerwony* 2 | *Wiersze Min* |
|---|---|---|---|
| *Niebieski* 1 | 6 | 5 | 5* |
| *Niebieski* 2 | 3 | 4 | 3 |
| *Kolumny Max* | 6 | 5* | |

cena gry równa jest 5, ponieważ jeśli gracze grają prawidłowo (stosują strategię Niebieski 1 przeciwko strategii Czerwony 2) to Niebieski stale będzie otrzymywać 5 jednostek.

W grach 2 × 2 wymagających stosowania mieszanych strategii, cena gry równa jest średniej wypłacie, którą otrzymuje się w rezultacie zastosowania optymalnej mieszanej strategii jednego gracza przeciw jakiejkolwiek czystej strategii drugiego gracza. Tak w grze

| | *Czerwony* 1 | *Czerwony* 2 |
|---|---|---|
| *Niebieski* 1 | 3 | 6 |
| *Niebieski* 2 | 5 | 4 |

w której, jak ustaliliśmy przedtem, Czerwony powinien stosować obie strategie z jednakową częstotliwością, kie-

rując się np. podrzucaniem monety, średnia wypłata przeciw strategii Niebieski 1 równa jest

$$\frac{1\times 3+1\times 6}{1+1}=4\frac{1}{2}$$

To właśnie jest cena gry. Jeśli obliczyliśmy średnią wypłatę dla optymalnej strategii Niebieskiego (przypominamy, że częstotliwości równe są 1 : 3) przeciw strategii 1 Czerwonego to rezultat będzie taki sam:

$$\frac{1\times 3+3\times 5}{1+3}=4\frac{1}{2}$$

W grach 2 $\times$ 2 wymagających stosowania strategii mieszanych średnia wypłata jest zawsze taka sama (w naszym przypadku 4,5), jeśli optymalna strategia mieszana jednego gracza stosowana jest przeciw jednej z czystych strategii drugiego. Ta średnia wypłata jest właśnie ceną gry. I na odwrót, na podstawie stałości ceny gry stwierdzić możemy poprawność ustalenia względnych częstotliwości. Jeśli wybrane strategie mieszane nie dają jednakowych średnich wypłat przy stosowaniu przeciw każdej z czystych strategii przeciwnika, wybór nie jest optymalny.

## Wpływ zmian skali

Spróbujemy rozwiązać trzy proste gry, po części dla nabrania wprawy, a po części dla zilustrowania kilku ogólnych reguł.

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 6 | 7 |
| Częstotliwości Czerw. | 5 | 4 | |

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 4 | 2 |
| 2 | 7 | 9 | 7 |
| Częstotliwości Czerw. | 5 | 4 | |

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 2 | 2 |
| 2 | 8 | 12 | 7 |
| Częstotliwości Czerw. | 5 | 4 | |

Wszystkie trzy gry dziwnym zbiegiem okoliczności, wymagają zastosowania takiej samej mieszanej strategii: dla

Niebieskiego w stosunku 2 : 7, zaś dla Czerwonego w stosunku 5 : 4. Dlaczego jednak we wszystkich trzech przypadkach trzeba grać jednakowo? Zauważmy, że drugą grę można otrzymać z pierwszej, jeśli do każdej wypłaty dodamy trzy jednostki:

| | |
|---|---|
| 8 | 1 |
| 4 | 6 |

+ 3 =

| | |
|---|---|
| 11 | 4 |
| 7 | 9 |

Trzecią zaś można otrzymać z pierwszej mnożąc każdą wypłatę przez dwa:

| | |
|---|---|
| 8 | 1 |
| 4 | 6 |

× 2 =

| | |
|---|---|
| 16 | 2 |
| 8 | 12 |

Powyższe gry tłumaczą ogólne reguły: *na sposób prowadzenia gry nie ma wpływu dodanie do wszystkich wypłat stałej liczby, ani też pomnożenie wszystkich wypłat przez dodatnią stałą liczbę.*

Natomiast cena gry we wszystkich trzech przypadkach jest różna:

$$\frac{5 \times 8 + 4 \times 1}{5+4} = 4\frac{8}{9}$$

$$\frac{5 \times 11 + 4 \times 4}{5+4} = 7\frac{8}{9} = 4\frac{8}{9} + 3$$

$$\frac{5 \times 16 + 4 \times 2}{5+4} = 9\frac{7}{9} = 4\frac{8}{9} \times 2$$

Tak więc, przy dodaniu stałej liczby do wszystkich wypłat zmienia się tylko stopień niesprawiedliwości gry, zaś przy pomnożeniu wszystkich wypłat przez stałą liczbę zmienia się tylko waluta, w której mierzy się wypłatę.

### Dobra gra przeciw złej

Wiemy już teraz o grze 2 × 2 prawie wszystko z wyjątkiem tego, co się stanie, gdy jeden z graczy (powiedzmy Niebieski) gra stosując optymalną strategię, drugi

zaś (Czerwony) — nie. Powinniśmy rozróżnić przy tym dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: jeśli w grze istnieją punkty siodłowe (to znaczy optymalnymi strategiami są czyste strategie), i jeśli Czerwony nie zastosuje optymalnej czystej strategii, to będzie grać z rujnującą go szczodrobliwością.

Przypadek drugi: jeśli optymalnymi strategiami są strategie mieszane, to niezależnie od tego, co zrobi Czerwony, poprawna gra Niebieskiego zapewni mu przez cały czas jedną i tę samą średnią wypłatę. Podobnie, jeśli Czerwony zastosuje poprawną strategię mieszaną, to rezultat będzie zawsze taki sam, niezależnie od posunięć Niebieskiego. Dla gier o większej ilości strategii, jak np. gry 2 × 3, odpowiedź będzie odmienna, nieco bardziej zadowalająca.

Posługiwaliśmy się dotąd cyframi i kratkami macierzy, by ułatwić opanowanie paru zasadniczych reguł. Te niezbyt błyskotliwe schematy rozpatrywaliśmy jako gry. Teraz zajmiemy się kilku żywymi przykładami. Jeżeli stosowanie nazwy „gra" do niektórych naszych układów było nieco zaskakujące, to zamieszczone poniżej przykłady zwiększą — być może — zdziwienie. Rzecz w tym, że prawie wszystko może być przedstawione jako gra.

**Przykład 2 — Bombardowanie:** Spróbujmy wymyśloną operację wojskową przedstawić w formie gry 2 × 2. Załóżmy, że dwa bombowce Niebieskiego są w akcji bojowej. Jeden z nich niesie bombę, drugi zaś urządzenia dla wywołania zakłóceń w stacjach radiolokacyjnych, aparaturę dla określenia szkód, jakie poniósł obiekt itp. Bombowce lecą w takim szyku, że pierwszy ma zapewnioną skuteczniejszą ochronę działkami drugiego bombowca niż drugi działkami pierwszego. Istnieją obawy, aby bombowca wiozącego bombę nie strąciły atakujące myśliwce Czerwonego; a zapewnienie mu bezpieczeństwa dominuje nad wszelkimi pozostałymi względami. Problem jest następujący; który z bombowców — pierwszy czy drugi — powinien nieść bombę i który powinien być zaatakowany przez myśliwce Czerwonego.

Strategie są następujące:

Niebieski 1 — nosiciel bomb w gorszej sytuacji
Niebieski 2 — nosiciel bomb w lepszej sytuacji
Czerwony 1 — atakować bombowiec w gorszej sytuacji
Czerwony 2 — atakować bombowiec w lepszej sytuacji

Przyjmijmy, że szanse nosiciela bomb, by nie zostać strąconym, równe są 60%, jeśli będzie atakowany w gorszej sytuacji, 80% — jeśli będzie atakowany w lepszej sytuacji, i 100% — jeśli nie będzie atakowany. Przedstawmy powyższe za pomocą macierzy.

| | *Czerwony* 1 | *Czerwony* 2 | *Częstotliwości Nieb.* |
|---|---|---|---|
| *Niebieski* 1 | 60 | 100 | 20 |
| *Niebieski* 2 | 100 | 80 | 40 |
| *Częstotliwości Czerw.* | 20 | 40 | |

Jeśli przeanalizujemy tę grę w podobny sposób, jak uprzednio, to okaże się, że zarówno Czerwony, jak i Niebieski winni zmieniać strategie i że względne częstotliwości dla obu są jednakowe i że na 20 przypadków zastosowania strategii 1 powinno wypadać 40 przypadków zastosowania strategii 2. Innymi słowy, Niebieski powinien uważać za lepsze umieszczenie bombowca w pozycji bronionej w stosunku 40 : 20, zaś Czerwony powinien (także w stosunku 40 : 20) atakować samolot lecący na tej właśnie pozycji (rozumie się samo przez się, że względne częstotliwości 40 : 20 są równoważne względnym częstoliwościom 2 : 1). Cena gry wynosi dla Niebieskiego

$$\frac{20 \times 60 + 40 \times 100}{20 + 40} = 86\frac{2}{3} \text{ procent}$$

Tak więc, jeżeli Niebieski ustalając pozycje swego bombowca zastosuje odpowiednią strategię — zamiast zdawać się na łaskę przypadku — to może mieć nadzieję, że nie 80%, ale 86 % bomb osiągnie cel. Korzyść wynosi więc około 8%.

**P r z y k ł a d 3 — Cocktail:** W poprzednim przykładzie korzyść z zastosowania mieszanych strategii wynosiła 8%.



Nie zawsze jest tak skromna. Oto zdarzenie, odkryte w archiwach pewnego doskonałego baru. Alex i Olaf zabijali czas między lotami.

— „Znam pewną dobrą grę — powiedział Alex. — Będziemy pokazywali sobie palce, jeden lub dwa. Jeśli obaj pokażemy po jednym palcu, to ty stawiasz mi jeden cocktail. Jeśli obaj wystawimy po dwa palce — to stawiasz mi dwa kieliszki. Jeśli zaś ilość palców nie będzie zgodna, wezmę od ciebie tylko 10 centów. To skróci nam czekanie".

Propozycja zdawała się nie interesować Olafa.

— „Wygląda to na bardzo nudną grę, przynajmniej jej początek".

Popatrzył w sufit i przez pewien czas bezdźwięcznie poruszał wargami. Potem powiedział:

— „Jeśli przed każdą partią zapłacisz mi 42 centy, jako częściową rekompensatę za wszystkie te cocktaile po 55 centów, które muszę ci postawić, to z przyjemnością spędzę z tobą ten czas".

— „41 centów" — powiedział Alex.

— „Dobrze — westchnął Olaf — powinieneś naprawdę płacić mi 42 centy, co najmniej raz na każde trzydzieści partii. Ale mam nadzieję, że nasza gra nie potrwa tak długo".

W tej grze macierz wypłat przedstawia się następująco (strategia Alex 1, oznacza jeden palec, itd.):

| | | Olaf 1 | Olaf 2 |
|---|---|---|---|
| Alex | 1 | 55 | 10 |
| | 2 | 10 | 110 |

Olaf zauważył od razu, że gra jest dla niego niesprawiedliwa. Dlatego zażądał wyrównania, które by uczyniło grę sprawiedliwą, jeżeli będzie grał prawidłowo.

Jak powinien grać? Wykonajmy obliczenie:

| | | Olaf 1 | Olaf 2 | Częstotliwości Alexa |
|---|---|---|---|---|
| Alex | 1 | 55 | 10 | 100 |
| | 2 | 10 | 110 | 45 |
| Częstotliwości Olafa | | 100 | 45 | |

Olaf powinien zatem zastosować mieszaną strategię, pokazując bądź jeden, bądź dwa palce w stosunku 100 : 45. Jeżeli Alex będzie przez cały ten czas pokazywał jeden palec, to średnia strata Olafa w jednej partii wyniesie:

$$\frac{100\times55+45\times10}{100+45}=41\frac{1}{29}$$

Podobnie jeśli Alex będzie przez cały czas wystawiał dwa palce, to Olaf będzie tracił średnio

$$\frac{100\times10+45\times110}{100+45}=41\frac{1}{29}$$

Straty jego wyniosą średnio $41^1/_{29}$ centów niezależnie od tego, co robi Alex. A więc, stosując mieszane strategie w stosunku 100 : 45 (lub 20 : 9) Olaf może ustabilizować grę i obliczyć wielkość rekompensaty, której musi zażądać od Alexa, aby gra była sprawiedliwa.

Najlepszą strategią dla Alexa jest także miks[8] 100 : 45, co pozwala mu średnio otrzymać $41^1/_{29}$ centów po każdej partii. Zauważmy, że Alex stosując czystą strategię — łatwą do odgadnięcia dla Olafa, może zapewnić sobie wygraną tylko 10 centów. Jeśli porównać te 10 centów ze średnią wygraną $41^1/_{29}$ centów, przy strategii mieszanej,

to mamy przykład, w którym strategia mieszana jest lepsza o kilkaset procent od strategii czystej.

Na ogół, jeśli wypłaty w kratkach na jednej przekątnej są niskie a w kratkach na drugiej przekątnej wysokie, to należy stosować strategię mieszaną.

**P r z y k ł a d 4 — Zdarzenie nad rzeką:** Do Steve'a podszedł obcy człowiek i zaproponował mu grę w orła i reszkę. Steve odpowiedział, że jest zbyt gorąco na tak wyczerpujące ćwiczenia. Wówczas nieznajomy zaproponował:

— „Dobrze, możemy się więc położyć i będziemy jednocześnie mówili „orzeł" lub „reszka" i aby było ciekawiej, będę płacił 30 dolarów za każdym razem, jeśli ja powiem „reszka", a pan „orzeł", zaś 10 dolarów, gdy będzie na odwrót. By gra była sprawiedliwa, pan będzie płacił mi 20 dolarów za każdym razem, gdy wymienimy to samo".

Ostrzeżony przez otoczenie (rzecz działa się na statku płynącym na Missisipi) Steve pomyślał, że powinien



jak najszybciej zawołać policję, a nie grać z tym człowiekiem. Zainteresowało go to bardziej niż sama gra. Dlatego zadał sobie trud przeprowadzenia następującego obliczenia:

| | | Obcy O | Obcy R | Częstotliwości Steve'a |
|---|---|---|---|---|
| Steve | O | −20 | 30 | 30 |
| | R | 10 | −20 | 50 |
| Częstotliwości Obcego | | 50 | 30 | |

$$\text{Cena gry dla Steve'a} = \frac{30 \times (-20) + 50 \times 10}{30 + 50} = -1{,}25$$

Najlepsze, czego mógł się spodziewać stosując optymalną nawet mieszaną strategię (wywoływanie orła i reszki w stosunku 3 : 5), to średnia strata 1,25 dolara w każdej partii. Tak więc jego podejrzenia okazały się trafne.

**Przykład 5 — Atak i obrona:** Niebieski ma dwa obiekty obronne. Może z powodzeniem bronić każdego z nich, lecz nie obu razem. Czerwony z kolei może atakować także tylko jeden obiekt, nie oba. Co więcej, jeden z obiektów jest trzy razy ważniejszy niż drugi. Jakie strategie zastosować?

Niech wartość mniej ważnego obiektu wynosi 1. Wówczas, jeśli ocaleją obie pozycje, wypłata wyniesie 4, jeśli ocaleje ważniejszy obiekt — wypłata wyniesie 3, i wreszcie jeśli ocaleje mniej ważny obiekt, wypłata równa się 1. Oznaczając obronę (lub atak) mniej ważnego obiektu jako pierwszą strategię, otrzymujemy taką macierz:

| | | Czerwony 1 | Czerwony 2 |
|---|---|---|---|
| Niebieski | 1 | 4 | 1 |
| | 2 | 3 | 4 |

Nie ma punktu siodłowego, o czym łatwo przekonać się wypisując minimalne wartości wierszy i maksymalne wartości kolumn. Musimy zatem zastosować tu strategię mieszaną. Wykonajmy — jak zwykle — obliczenia:

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | Częstotliwości Nieb. |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 4 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 3 |
| Częstotliwości Czerw. | 3 | 1 | |

Niebieski powinien więc forsować obronę swojego ważniejszego obiektu w stosunku 3 : 1, podczas gdy Czerwony powinien atakować mniej ważny obiekt trzy razy częściej niż obiekt ważniejszy. Cena gry równa jest $3^1/_4$.

Przykład ten wydaje się na pierwszy rzut oka podobny do przykładu z bombowcami. Ale jak bardzo różnią się strategie: w danym przykładzie Czerwonemu wygodniej jest atakować obiekt o mniejszym znaczeniu.

**Przykład 6 — Music Hall:** Pewnego zimowego dnia Sam i Gena umówili się na spotkanie przed music hall'em



ok. szóstej. Jeśli Sam przyjdzie zbyt wcześnie, nie zastanie Geny i będzie musiał jeździć wokół bloku domów w tłoku i słocie, aż do jej przybycia. Uważa on, że taka sytuacja powinna być oceniona na —1. Jeśli zaś Gena przyjdzie wcześniej, a Sam się spóźni, wówczas ona zmarznie i zmoknie. Wynikającą z tego satysfakcję oceni na —3. Tak więc gra będzie następująca:

| Sam | *Gena:* *wcześnie* | *późno* | Częstotliwości Sama |
|---|---|---|---|
| *wcześnie* | 0 | −1 | 3 |
| *późno* | −3 | 0 | 1 |
| *Częstotliwości Geny* | 1 | 3 | |

Ta gra wymaga strategii mieszanej. Sam powinien przyjeżdżać wcześniej i później w stosunku 3 : 1. Średnia wypłata równa jest $-3/4$.

Rozwiązanie, które daje teoria gier dla Geny, a mianowicie mieszana strategia z względnymi częstotliwościami 1 : 3 na korzyść spóźnienia się, jest zagadnieniem czysto akademickim. Przecież bez wątpienia nie zależy jej na zepsuciu Samowi przyjemności. Wypłata należy do Sama, a ona gra rolę Natury.

**Przykład 7 — Ciemnia:** Goldy wywołuje w ciemni bezcenny negatyw — portret noworodka w jego ósmej minucie życia. Goldy ostatnio nie dosypiał i jego niezawodna zawyczaj technika jest nadwątlona. Nuci sobie pod nosem oczekując, kiedy minie 15 min.

Nagle śpiew się urywa.

Czy ten wywoływacz nie jest przeterminowany? A może go już rozcieńczył w stosunku 2 : 1 przed paru dniami. Goldy w tej sytuacji staje na wysokości zadania, początkowo za pomocą anglosaskich mocnych wyrażonek, a potem analizy.

Jeśli wywoływacz jest tym, czym powinien być, to 15 min. jest w sam raz; ocena — 10 jednostek. Jeśli jest rozcieńczony, Goldy może zaryzykować zastosowanie prawa odwrotnej proporcjonalności, choć bywa ono zniechęcająco określane jako Niewydolność Prawa Odwrotnej Proporcjonalności. Jeśli będzie wywoływał 30 min., jakość



negatywu obniży się nieznacznie i ocena wyniesie 9 jednostek. Załóżmy jednak, że wywołuje on rozwodnionym wywoływaczem 15 min. Wówczas dostaje słaby, małokontrastowy negatyw zamazanego obiektu w pokoju bez światłocieni; niezbyt to dobrze, ale jeszcze da się z nim coś zrobić i ocena równa jest 6 jednostkom. A czym grozi wywoływanie przez 30 min. nieprzeterminowanym wywoływaczem? Grube ziarno, kontrastowość jak w gazecie złagodzono szarą mgłą chemikalii; takie „dzieło" może otrzymać ocenę nie większą niż 2.

Macierz tej gry może zostać zapisana w następującej postaci:

| | | *Natura* 1 | 2 | *Częstotliwości Goldy'ego* |
|---|---|---|---|---|
| *Goldy* | 1 | 10 | 6 | 7 |
| | 2 | 2 | 9 | 4 |

W tej grze istnieją następujące strategie:

Goldy 1 — wywoływać 15 min.

Goldy 2 — wywoływać 30 min.

Natura 1 — wywoływacz dobry

Natura 2 — wywoływacz rozcieńczony.

Okazuje się, że należy zastosować strategię mieszaną z częstotliwościami względnymi 7 : 4 na korzyść krótszego czasu wywoływania.

Przy takiej strategii oczekiwanie wygranej równe będzie cenie gry:

$$\frac{7\times6+4\times9}{11}=7\frac{1}{11}$$

Ściśle mówiąc, Goldy powinien zmieniać swoje strategie. Jeśli jednak wierzy, że polepszenie lub pogorszenie jakości negatywu jest proporcjonalne do czasu, wówczas może zastosować po trochę z każdej strategii i wywoływać przez [9]

$$\frac{7\times15+4\times30}{11}=20\frac{5}{11}\text{ min.}$$

**Przykład 8 — Urodziny:** Po szczególnie wyczerpującym dniu pracy, Frank spieszy do domu, kiedy nagle przychodzi mu do głowy, że Kitty ma dziś urodziny. Ale czy na pewno? Wszystkie sklepy są już zamknięte, wyjąwszy kwiarciarnie.

Jeśli Kitty nie ma dzisiaj urodzin, a on nie przyniesie upominku — to sytuacja będzie neutralna, czyli wypłata będzie równa zeru. Jeśli urodzin nie ma, a przyjdzie bez



uzasadnienia wymachując różami, wówczas może zostać poddany testowi alkoholowemu; mimo zaambarasowania wywinie się pewnie gładko — to jest już warte 1. Jeśli dziś są jej urodziny, i okaże się, że nie zapomniał o nich, to jest warte nieco więcej — powiedzmy 1,5 jednostki. Ale jeśliby zapomniał — to przepadł z kretesem i jego położenie może być ocenione na −10.

Frank w myśli tworzy macierz wypłat

| | | Natura | | |
|---|---|---|---|---|
| | | nie-urodziny | urodziny | Częstotliwości Franka |
| Frank | puste ręce | 0 | −10 | 0.5 |
| | kwiaty | 1 | 1.5 | 10 |

i widzi, że względne częstotliwości jego mieszanej strategii wynoszą 10 : 0,5 czyli 20 : 1 na korzyść kwiatów.

Przykład ten zawiera niezamierzoną lekcję, za którą Czytelnik winien jest wdzięczność pewnemu sadyście, jednemu z pierwszych czytelników rękopisu, bowiem autor — na nieszczęście — zapomniał sprawdzić w tym przypadku punkt siodłowy, który przecież jest, i okazuje się, że Frank powinien zawsze przynosić kwiaty. Zupełnie tak samo powinien czynić Czytelnik wbrew swoim zakorzenionym przyzwyczajeniom.

Prawdopodobieństwo, że przypadkowo wybrana macierz może mieć punkt siodłowy, jest dość duże przy małych macierzach. Szanse wynoszą 2 : 1 na korzyść punktu siodłowego w przypadku gry 2 × 2, 2 : 7 — dla gry 3 × 3 i 4 : 31 dla gry 4 × 4. Zmniejszają się do jednej tysięcznej dla gry 9 × 9.

**Przykład 9 — Sprzedawca uliczny:** Merril ma koncesję na sprzedaż ciemnych okularów i parasoli na stadionie Yankee, a popyt na nie zależny jest, oczywiście, od pogody.

Merril zaobserwował, że może sprzedać około 500 parasoli w dzień deszczowy i około 100 w słoneczny. W tym ostatnim przypadku może on także liczyć na sprzedaż 1000 par okularów przeciwsłonecznych. Za parasole płaci po 50 centów, a sprzedaje po dolarze. Za okulary płaci po

20 centów, a sprzedaje po 50. Chce zainwestować w swoje przedsięwzięcie 250 dolarów. Wszystko, czego nie sprzeda, jest czystą stratą (w domu towarem bawią się dzieci).

Merril buduje z powyższych danych tablicę dochodów:

| Kupno w: | Sprzedaż w: deszcz | Sprzedaż w: słońce | Częstotliwości |
|---|---|---|---|
| *deszcz* | 250 | −150 | 5 |
| *słońce* | −150 | 350 | 4 |

i natychmiast nabiera odwagi. Jego gra jest grą ze strategiami mieszanymi i jeżeli potrafi znaleźć strategię stabilizującą, to uchroni się od kaprysów pogody.

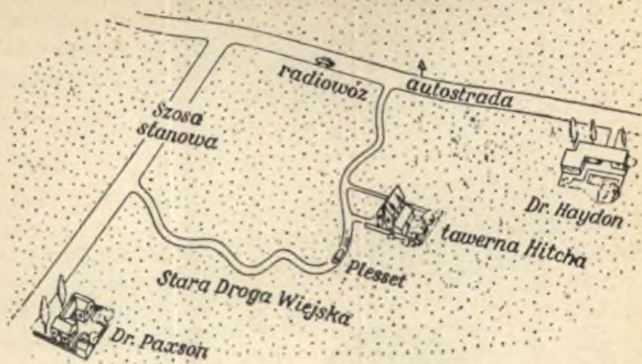
Rozwiązanie gry wskazuje, że powinien kupować towary „deszczowe" i „słoneczne", zgodnie z względnymi częstotliwościami 5 : 4 i że cena gry równa jest

$$\frac{5 \times (250) + 4 \times (-150)}{5+4} =$$
$$= 72{,}22 \text{ dolara}$$

Zamiast kierować się względnymi częstotliwościami [10], Merril postanawia ulokować $^{5}/_{9}$ swego kapitału w parasole, zaś $^{4}/_{9}$ kapitału w okulary. Tak więc, kupuje parasole za 161,11 dolara (włączając 22,22 dolara z programu „słońce") i ciemne okulary za 88,89 dolara i przygotowuje się na miły, stały dochód wynoszący 72,22 dolara.

**P r z y k ł a d 10 — Radiowóz:** Ten przykład jest nieco bardziej urozmaicony. Dyżurna policjantka tak szybko, jak tylko mogła, podawała przez radio informację dla dyżurnego samochodu nr 2, patrolującego państwową autostradę:

— „... przed chwilą wyjechał cadillac'iem z tawerny Hitcha przy Starej Drodze Wiejskiej. Kierunek ucieczki




nieznany. Istnieją podejrzenia, że Plesset jest poważnie raniony, lecz ma 50% szans uratowania się, jeśli dobrnie do jakiegoś dobrego lekarza, np. do dra Haydona. Mógłby go uratować także weterynarz Paxson, ale wtedy jego szanse są o połowę mniejsze. Zastrzelił oficera Flooda, który ma dużą rodzinę".

Pomocnik szeryfa, Henderson, odwiązał nareszcie sznur mikrofonu od karabinu maszynowego i swojego buta numer 45, po czym powiedział:

— „Zrozumiałem. Możemy złapać go, jeśli gna do Haydona. Mamy 50 szans na 100 złapać go na szosie stanowej, jeśli jedzie do weterynarza. Musimy złapać Plesseta, ponieważ go nie dogonimy. Niedawno pomocnik szeryfa, Root, zepsuł skrzynkę biegów w tej maszynie i od tego czasu nasza szybkość jest po prostu hańbą całego departamentu".

Nadajnik bazy głównej znowu zaszumiał, lecz tym razem zamiast melodyjnego głosu dyżurnej rozległ się z głośnika zachrypnięty głos szeryfa Lippa:

„Jeśli wiecie coś jeszcze, to nie mówcie przez radio. On ma w cadillacu pierwszorzędny odbiornik. Złapcie go".

Roota olśniła nagła idea: zahamował, szamocąc się z lewarkiem skrzynki biegów.

— „Henderson, może dzisiaj nie będziemy korzystać z karabinu maszynowego, ale potrzebny nam ołówek. Przecież to jest po prostu gra 2 ×2. Dyżurna powiedziała nam wszystko, co trzeba.

— Ty chcesz wykorzystać *jej* dane?

— A czy masz lepsze? Ona ma intuicję. oprócz tego są wiadomości z bazy. Ano zobaczymy ... Załóżmy, że jedziemy do Haydona. Załóżmy, że Plesset zrobił to samo. Wówczas schwycimy tego bandytę, jeśli znowu nie strzelisz byka. Lecz jeśli on jedzie do Paxsona, istnieją trzy szanse na cztery, że stary doktor wykończy go.

— Nie rozumiem.

— Bo to nie takie proste. Przecież Haydon ma połowę szans na jego uratowanie. Jeśli zaś on pojedzie do Paxsona, to jego szanse dwukrotnie są zmniejszone. Połowa połowy, to będzie jedna czwarta. Dlatego szanse, że umrze, równe są trzem czwartym, czyli jednostka 1 minus ćwierć. Zrozumiałe?

— Jasne.

— No. Jeśli teraz pojedziemy do Paxsona, to trudniej coś wykombinować. Przede wszystkim Plesset może pojechać do Haydona i w tym przypadku możemy liczyć tylko na doktora, że go wykończy, zaś prawdopodobieństwo tego równe jest tylko połowie.

— Musisz odjąć połowę z jedności.

— Tak właśnie zrobiłem. Załóżmy teraz, że on także goni do Paxsona. Wówczas: albo go złapiemy, szanse tego równe są połowie, albo nie uda się nam go złapać; prawdopodobieństwo tego też równe jest połowie, lecz jest prawdopodobieństwo równe trzem czwartym, że weterynarz go wykończy. Tak więc ogólne prawdopodobieństwo tego, że my będziemy go mieli a nie doktor, równe jest połowie trzech czwartych, to jest trzem ósmym. Dodaj do tego połówkowe prawdopodobieństwa tego, że go nie złapiemy i już mamy prawdopodobieństwo siedem ósmych.

— Nie podobają mi się te zabawy. Wymknie się nam, gdy tu ględzimy.

— Uspokój się, przecież on też musi wszystko obli-

czyć, a znajduje się w znacznie trudniejszym położeniu niż my. Czym więc dysponujemy?

| Radiowóz jedzie do: | Cadillac jedzie do Haydona | Cadillac jedzie do Paxsona |
|---|---|---|
| Haydona | 1 | 3/4 |
| Paxsona | 1/2 | 7/8 |

— Ułamkowe liczby nie są najwygodniejsze w tym oświetleniu. Pomnóżmy wszystko przez osiem. Słyszałem, że to niczego nie psuje.

| Radiowóz jedzie do: | Cadillac jedzie do: Haydona | Cadillac jedzie do: Paxsona |
|---|---|---|
| Haydona | 8 | 6 |
| Paxsona | 4 | 7 |

— Teraz już jasne, że to nie takie proste...

— Wiedziałem o tym. Nie możemy trzymać się żadnej czystej strategii. Muszę teraz obliczyć najlepszą mieszaną strategię.

| Radiowóz jedzie do: | Cadillac jedzie do Haydona | Cadillac jedzie do Paxsona | Częstotliwości policji |
|---|---|---|---|
| Haydona | 8 | 6 | 3 |
| Paxsona | 4 | 7 | 2 |
| Częstotliwości Plesseta | 1 | 4 | |

— Taak ... 3 : 2 na korzyść Haydona. Popatrz teraz na zegarek — ile sekund?

— 28

— Dobra, jedziemy do Haydona. Naszym wozem łatwiej byłoby wykręcić, gdyby nie ten długi bagażnik ...

— Twoje czary z sekundnikiem, to po prostu głupota — zawarczał Henderson — Dlaczego od razu nie pojechaliśmy do Haydona?

— To zmieniłoby nasze szanse — w danym przypadku niewiele, lecz jednak ... Gdybyśmy za jedyne rozwiązanie uważali jazdę do Haydona, to Plesset mógłby się nam wymknąć wybrawszy jazdę do Paxsona z 75% ryzyka.

A tak działa z 80-procentowym ryzykiem, niezależnie od tego, co robi. Teraz o zegarze. Pierwsze 30 sek. i pozostałe 20 sek. mają się do siebie jak względne częstotliwości 3 : 2.

## Podsumowanie metod rozwiązywania gier 2 × 2

Podsumujemy pierwszą część tego rozdziału na jeszcze jednym przykładzie.

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $-1/3$ | $1/4$ |
| 2 | $1/2$ | 0 |

Jak ją należy rozegrać? Załóżmy, że jesteśmy uczuleni na ułamki i liczby ujemne. Wiemy już, że pomnożenie wszystkich liczb macierzy przez tę samą liczbę dodatnią, jak i dodanie do każdego elementu macierzy tej samej liczby dodatniej nie wpływa na rozgrywkę. Aby pozbyć się alergii, pomnóżmy wszystkie liczby macierzy przez jakąkolwiek szczęśliwie dobraną liczbę, np. przez 12. Poprawiliśmy wygląd naszej macierzy:

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 1 | −4 | 3 |
| 2 | 6 | 0 |

Celem pozbycia się liczb ujemnych, dodamy do każdego elementu, np. 4. Otrzymamy:

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 7 |
| 2 | 10 | 4 |

Teraz gotowi jesteśmy do szukania rozwiązania. Rozpoczniemy, oczywiście, od sprawdzenia punktu siodłowego:

| | | Czerwony 1 | Czerwony 2 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|
| Niebieski | 1 | 0 | 7 | 0 |
| | 2 | 10 | 4 | 4* |
| Kolumny Max | | 10 | 7* | |

Maksimum równe jest 4, zaś minimum 7. Punktu siodłowego nie ma i dlatego musimy kontynuować naszą pracę. Zaczniemy od zbadania sytuacji Czerwonego:

| Czerwony 1 | Czerwony 2 |
|---|---|
| 0 | 7 |
| 10 | 4 |

Odejmując elementy jednego od drugiego, otrzymamy:

| Czerwony 1 | Czerwony 2 |
|---|---|
| −10 | 3 |

Dlatego względne częstotliwości strategii Czerwony 1 i Czerwony 2 dane są w następujących kwadratach:

| 1 | |
|---|---|
| | 3 |

| | 2 |
|---|---|
| −10 | |

Jedna z nich jest ujemna, lecz my zawsze lekceważymy znak względnych częstotliwości. Najwygodniejszą więc strategią Czerwonego jest (jeśli nic nie nawali) mieszana strategia 3 : 10.

Nasze następne zadanie polega na obliczeniu względnych częstotliwości dla Niebieskiego

| Niebieski | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 7 |
| 2 | 10 | 4 |

Odejmując odpowiednie elementy z prawej strony od elementów z lewej mamy:

| Niebieski | |
|---|---|
| 1 | −7 |
| 2 | 6 |

Względne częstotliwości dane są w kwadratach:

| 1 | | | |
|---|---|---|---|
| | | −7 | |
| 6 | | | 2 |

Niebieski powinien zatem stosować mieszaną strategię z względnymi częstotliwościami 6 : 7 (jeżeli wszystko gra).

Sprawdzimy poprawność naszych obliczeń badając każdą mieszaną strategię przeciw każdej czystej strategii przeciwnika. Strategia Niebieski 6 : 7 zastosowana przeciw strategii Czerwony 1 — daje

$$\frac{6\times0+7\times10}{6+7}=\frac{70}{13}$$

zaś przeciw strategii Czerwony 2

$$\frac{6\times7+7\times4}{6+7}=\frac{70}{13}$$

Z drugiej strony strategia Czerwony 3 : 10 zastosowana przeciwko strategii Niebieski 1, daje

$$\frac{3\times0+10\times7}{3+10}=\frac{70}{13}$$

zaś przeciw strategii Niebieski 2

$$\frac{3\times10+10\times4}{3+10}=\frac{70}{13}$$

Tak więc, wszystko jest w porządku. Niebieski i Czerwony powinny grać zgodnie z względnymi częstotliwościami 6 : 7 i 3 : 10.

Czy liczba $^{70}/_{13}$ jest ceną gry? Nie! Przypominamy, że pomnożyliśmy każdą liczbę przez 12 i dodaliśmy do każdej liczby 4. Cenę gry otrzymamy, jeśli uczynimy to samo w odwrotnej kolejności. Ponieważ uprzednio dodawaliśmy 4, to teraz odejmiemy 4, co daje:

$$\frac{70}{13}-4=\frac{70-52}{13}=\frac{18}{13}$$

Następnie, ponieważ uprzednio mnożyliśmy przez 12, będziemy teraz dzielić przez 12, czyli:

$$\frac{18}{13} : 12 = \frac{18}{13 \times 12} = \frac{3}{26}$$

W rezultacie cena naszej gry równa jest $^3/_{26}$, co, można sprawdzić próbując nasze mieszane strategie w pierwotnej grze. Weźmy, np. mieszaną strategię Niebieski 6 : 7 przeciw strategii Czerwony 2; to daje

$$\frac{6 \times \frac{1}{4} + 7 \times 0}{6 + 7} = \frac{3}{26}$$

jak być powinno.

Poniżej podajemy kilka zadań dla tych, którzy chcą poćwiczyć, jest to najprawdopodobniej najlepszy sposób utrwalania wiadomości. Odpowiedzi znajdują się na końcu książki.

## Ćwiczenia 1

Określić względne częstotliwości i cenę następujących gier

*1*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 4 |
| 2 | 1 | 2 |

*2*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 8 |
| 2 | 6 | 7 |

*3*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | −5 | −8 |
| 2 | −6 | −7 |

*4*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 2 | 8 | 6 |

*5*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 3 |

*6*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 |

*7*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 |
| 2 | 4 | 2 |

*8*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |

*9*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | −1 | 1 |
| 2 | 2 | 0 |

*10*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | −3 | 1 |
| 2 | 3 | −1 |

*11*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 4 | −4 |
| 2 | −4 | 4 |

*12*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 4 | −5 |
| 2 | −5 | 4 |

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 |
| 2 | 5 | 4 |

*13*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 88 |
| 2 | 88 | 5 |

*14*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 4 | −5 |
| 2 | −4 | 5 |

*15*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 4 | −5 |
| 2 | −3 | 5 |

*16*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 |
| 2 | 7 | 5 |

*17*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | −3 |
| 2 | −7 | 5 |

*18*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 100 |
| 2 | 1000 | 10 |

*19*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 3 | −3 |
| 2 | −4 | 4 |

*20*

## Część II: gry $2 \times m$

Gry, w których jeden gracz ma dwie strategie, zaś drugi — wiele strategii zostały pomysłowo nazwane „grami dwa razy $m$", co zapisuje się jako „$2 \times m$". Litera $m$ może przedstawiać dowolną liczbę całkowitą większą od dwóch. Tymi grami będziemy się teraz zajmować. Na szczęście, ich rozwiązywanie nie wymaga praktycznie niczego poza umiejętnością rozwiązywania gier $2 \times 2$.

### Punkty siodłowe

Gry $2 \times m$ mają zawsze bądź punkt siodłowy (to znaczy dobrą czystą strategię), bądź dobrą strategię mieszaną opartą na dwu czystych strategiach. Dlatego można je sprowadzać do gier $2 \times 2$ i to sprowadzać różnymi sposobami.

Z początku zawsze trzeba sprawdzić, czy istnieje punkt siodłowy. W tym celu sprawdzamy minima wszystkich wierszy i wybieramy największe z nich. Następnie wypisujemy maksima wszystkich kolumn i wybieramy najmniejsze z nich. Jeśli te dwie liczby, nazwane maksiminem i minimaksem, są równe, wówczas istnieje punkt siodłowy i ich wspólna wartość jest ceną gry. Załóżmy, że mamy następującą grę:

|  |  | Czerwony 1 | Czerwony 2 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|
| Niebieski | 1 | 4 | 4 | 4 |
|  | 2 | 5 | 3 | 3 |
|  | 3 | 6 | 5 | 5* |
|  | 4 | 1 | 3 | 1 |
|  | 5 | 5 | 4 | 4 |
| Kolumny Max |  | 6 | 5* |  |

Ma ona punkt siodłowy: Niebieski 3 przeciw Czerwony 2, dlatego że maksimin równy jest minimaksowi i wynosi 5.

## Dominowanie

Jeśli gra nie ma punktu siodłowego, wówczas badamy strategię gracza, który ma wiele strategii. Przy tym może rzucić się w oczy, że niektóre z nich są o tyle gorsze od innych, że nie powinny być nigdy użyte. Przypuśćmy, że Niebieski jest graczem z wieloma strategiami. Jeśli jedna z jego strategii przewyższa drugą na podstawie porównania każdej z kratek parami, to pierwsza strategia jest dominującą, zaś druga powinna być wykreślona z macierzy. To wyłączenie można wykonać nawet wówczas, gdy dominująca strategia ma elementy równe elementom drugiej strategii. Jako przykład rozpatrzymy grę:

|  |  | Czerwony 1 | Czerwony 2 |
|---|---|---|---|
| Niebieski | 1 | 2 | 5 |
|  | 2 | 4 | 3 |
|  | 3 | 3 | 6 |
|  | 4 | 5 | 4 |
|  | 5 | 4 | 4 |

Z porównania strategii Niebieski 1 i Niebieski 3

|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Niebieski | 1 | 2 | 5 |
|  | 3 | 3 | 6 |

jasno wynika, że strategia Niebieski 3 jest dominująca. Podobnie porównując strategię Niebieski 2 i Niebieski 4, a także Niebieski 4 i Niebieski 5

| Niebieski | | |
|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 |
| 4 | 5 | 4 |

| Niebieski | | |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 4 |
| 5 | 4 | 4 |

widzimy, że strategia Niebieski 4 dominuje w obu przypadkach. Dlatego gra może być sprowadzona do następującej postaci:

| Niebieski \ *Czerwony* | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 6 |
| 4 | 5 | 4 |

Tak samo jeśli Czerwony ma wiele strategii i jeśli jedna kolumna dominuje nad inną na podstawie porównania kratki z kratką, to dominująca kolumna może być wyłączona (przypominamy, że Czerwony chce płacić możliwie najmniej).

Użyteczność tej reguły dla upraszczania gier rzuca się w oczy. Może być zastosowana oczywiście także w grach 2 × 2, ale wówczas, jeżeli istnieje dominująca kolumna lub szereg, istnieje także punkt siodłowy.

## Strategie mieszane

Jeśli w grze nie ma punktu siodłowego, sprawdzić trzeba dominowanie strategii u tego gracza, który ma ich wiele. Gdy graczem, mającym więcej niż dwie strategie jest Niebieski, to wyłączymy wszystkie strategie podporządkowane. Jeśli tym graczem jest Czerwony, wykreślimy wszystkie strategie dominujące. Wówczas pozostała gra (może ona oczywiście nie różnić się od początkowej, ponieważ ta mogła nie zawierać ani jednego dominowania) zawiera grę 2 × 2, o następującej własności: jej rozwiązanie jest równocześnie rozwiązaniem gry 2 × *m*. Teoria, jak znaleźć taką krytyczną grę 2 × 2, jest śmiesznie prosta, natomiast jej praktyczne zastosowanie może okazać się bardzo męczące.

To oznacza, że należy wziąć jedną z gier 2 × 2 rozwiązać ją i podstawić rozwiązanie w pierwotną grę. Jeśli mieszana strategia gracza z dwiema strategiami jest dobra przeciw dowolnej strategii gracza z wieloma strategiami, to rozwiązanie zostało znalezione. Słowo „jest dobra" oznacza, że gracz z dwoma strategiami otrzymuje co najmniej tyle (a zwykle więcej) grając przeciw każdej strategii tego drugiego faceta, ile otrzymywałby grając przeciw dwom strategiom pozostałym w wybranej pod-grze 2 × 2.

Spróbujmy wyjaśnić ostatnie zdanie. W grach 2 × 2 wymagających strategii mieszanej wykryliśmy, że gracz stosujący poprawną strategię mieszaną wygrywa to samo grając przeciwko dowolnej spośród dwu czystych strategii przeciwnika. Uprzedzaliśmy wówczas, że nie jest to najbardziej zadowalające, lecz że w przyszłości będzie może nieco lepiej. Otóż i „obiecana" przyszłość. W grze 2 × $m$ jeden z graczy, tak jak uprzednio, wygrywa to samo grając przeciw dowolnej czystej strategii wchodzącej w skład optymalnej mieszanej strategii przeciwnika; ale wygrywa więcej, grając przeciw dowolnej z pozostałych strategii przeciwnika. Istnieją wyjątki, w których wygrane są jednakowe również przy grze przeciw pewnym lub przeciw wszystkim pozostałym strategiom, lecz zwykle gracz otrzymuje więcej.

Pomóżmy sobie przykładem:

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 0 | 3 | 0* |
| 2 | 4 | 8 | −1 | 6 | −1 |
| Kolumny Max | 4 | 8 | 0* | 6 | |

Tutaj minimaks i maksimin są równe (zeru), a zatem gra posiada punkt siodłowy.

To uczciwa gra, ponieważ jej cena równa jest zeru. Najlepszymi strategiami są Niebieski 1 przeciw Czerwony 3.

Weźmy inną grę:

| | | Czerwony | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Wiersze Min |
| Niebieski | 1 | -6 | -1 | 1 | 4 | 7 | 4 | 3 | -6 |
| | 2 | 7 | -2 | 6 | 3 | -2 | -5 | 7 | -5* |
| Kolumny Max | | 7 | -1* | 6 | 4 | 7 | 4 | 7 | |

Tu maksimin równy jest −5, zaś minimaks równy −1 i punktu siodłowego nie ma. Jednakże strategie Czerwony 3, Czerwony 4, Czerwony 5 i Czerwony 7 dominują nad strategią Czerwony 2; dlatego gra może być sprowadzona do następującej macierzy:

| | | Czerwony | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 6 |
| Niebieski | 1 | -6 | -1 | 4 |
| | 2 | 7 | -2 | -5 |

w której powinniśmy znaleźć taką grę 2 × 2, której rozwiązanie spełniałoby grę 2 × 3 i następnie automatycznie spełniałoby pierwotną grę 2 × 7.

Zacznijmy od pierwszej gry 2 × 2.

| | | Czerwony | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| Niebieski | 1 | -6 | -1 |
| | 2 | 7 | -2 |

Znajdziemy dla niej wypróbowanymi metodami rozwiązanie 9 : 5 dla Niebieskiego i 1 : 13 dla Czerwonego.

Cena gry wynosi:

$$\frac{9\times(-6)+5\times7}{9+5}=-\frac{19}{14}$$

jeśli Niebieski gra z względnymi częstotliwościami 9 : 5 przeciw strategii Czerwony 1. Jest oczywiście taka sama przy grze przeciw strategii Czerwony 2:

$$\frac{9\times(-1)+5\times(-2)}{14}=-\frac{19}{14}$$

W praniu okaże się, że gdy sprawdzimy mieszane strategie Niebieski 9 : 5 przeciw pozostałej strategii Czerwonego (Czerwony 6) to rezultat powinien być większy niż $-{}^{19}/_{14}$ lub równy tej liczbie. Nie wolno nigdy tracić nadziei, bo rozczarowanie będzie dostatecznie gorzkie, gdy rozwiązanie okaże się nieprawdziwe. Miks Niebieskiego zastosowany przeciwko strategii Czerwony 6 daje

$$\frac{9\times4+5\times(-5)}{9+5}=\frac{11}{14}$$

a więc z pewnością więcej niż $-{}^{19}/_{14}$. Stąd wniosek, że optymalną strategią Niebieskiego jest miks 9 : 5, a dla Czerwonego 1 : 13 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0. W naszym przypadku pierwsza próbowana gra $2\times2$ zdała egzamin. W życiu nie zawsze, niestety, jest tak dobrze. Gdyby nie udało się nam wyłączyć paru strategii według zasady dominowania, to w naszym przypadku istniałoby $\frac{7\times6}{2}$ gier $2\times2$ i trzeba byłoby dla znalezienia poprawnego rozwiązania próbować wszystkich 21 gier. Ogólnie w grze $2\times m$ istnieje $\frac{m\ m-1)}{722}$ gier typu $2\times2$.

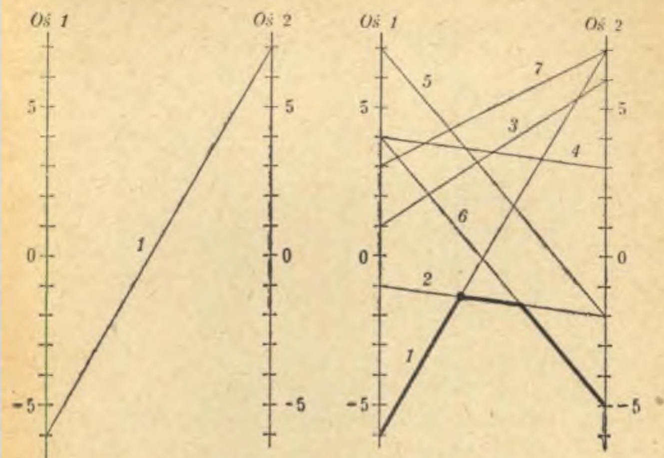
## Rozwiązanie graficzne

Choć nie mamy zamiaru posługiwać się specjalnymi sztuczkami, to jednak nie możemy nie przytoczyć jednej z nich po to, aby ożywić rozwiązywanie gier $2\times m$. Warto szybko zaznajomić się z tymi sposobami, zanim przydadzą się przy rozpatrywaniu bardziej skomplikowanych gier. Posłużymy się ostatnim przykładem, tj:

| | *Czerwony* | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | −6 | −1 | 1 | 4 | 7 | 4 | 3 |
| 2 | 7 | −2 | 6 | 3 | −2 | −5 | 7 |

Odłożymy na dwóch równoległych prostopadłych osiach wypłaty ze strategii 1 Czerwonego (−6 i 7) i połączymy prostą linią te punkty, tak jak pokazano na rysunku z le-

wej strony. To samo zrobimy dla wszystkich pozostałych strategii Czerwonego (na tym samym wykresie, jak to pokazuje rysunek).




Wyszła zupełna plątanina, ale plątanina pożyteczna. Obrysujmy teraz grubą linią dolną granicę otrzymanej figury i następnie oznaczmy *najwyższy punkt* tej grubej linii. Linie przecinające się w tym punkcie odpowiadają czystym strategiom, z których powinien korzystać Czerwony w swojej mieszanej strategii.

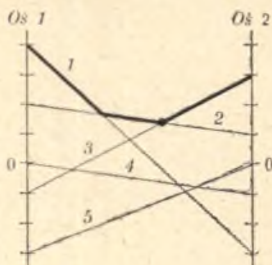
Na naszym rysunku w tym punkcie przecinają się proste 1 i 2, i dlatego mieszana strategia Czerwonego powinna być oparta na zastosowaniu strategii Czerwony 1 i Czerwony 2, co jest zgodne z poprzednio otrzymanymi rezultatami. Gdy para aktywnych strategii zostanie znaleziona, to nietrudno jest w otrzymanej w ten sposób grze $2 \times 2$ wyszukać optymalne strategie Niebieskiego i Czerwonego w początkowej grze $2 \times m$. Zwróćmy uwagę na to, że ten prosty wykres pozwolił nam natychmiast (po godzinnym szukaniu linijki) wybrać spośród 21 gier $2 \times 2$ tę grę, która jest dla nas pożądana.

Gdybyśmy mieli do czynienia z grą $m \times 2$, w której Niebieski ma wiele strategii, wówczas graficzny sposób określania aktywnych strategii Niebieskiego jest bardzo

podobny do wyżej opisanego: obrysujmy grubą kreską granicę wykresu na górze i oznaczmy *najniższy punkt* tej granicy. Linie przechodzące przez ten punkt pokazują, jakie są krytyczne strategie Niebieskiego.

Dla przykładu wykres gry

| | Czerwony 1 | Czerwony 2 |
|---|---|---|
| 1 | 4 | −3 |
| 2 | 2 | 1 |
| 3 | −1 | 3 |
| 4 | 0 | −1 |
| 5 | −3 | 0 |




Łatwo odczytać, że miks Niebieski winien być oparty na strategiach Niebieski 2 i Niebieski 3.

Pora już na przytoczenie paru przykładów

**Przykład 11 — Gra w słówka:** Goldsen i Kershaw zgodnie rozpoczęli grę w słówka. Kershaw licząc na zysk ekonomiczny, zaproponował tworzenie słów na podstawie następującego schematu:

— „Załóżmy, że ty wybierasz literę *a* lub *i*, zaś ja niezależnie od ciebie będę wybierał literę *f*, *t* lub *x*. Jeśli dwie wybrane litery utworzą jakieś słowo[11], to będę ci płacił jednego dolara i prócz tego dodatkową nagrodę w sumie 3 dolarów, jeśli słowo to jest rzeczownikiem lub zaimkiem. W takich rzadkich przypadkach, gdy litery nie utworzą słowa, ty zapłacisz mi 2 dolary.

— Nigdy nie angażuję się w takie sprawy bez głębokiej analizy „co, gdzie i kiedy" z pomocą metod teorii gier — odpowiedział Goldsen — Zaczekaj, proszę, chwilkę...".

Goldsen wypisuje sobie macierz wypłat

| Goldsen \ Kershaw | *f* | *t* | *x* | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|
| *a* | −2 | 1 | 4 | −2 |
| *i* | 1 | 4 | −2 | −2 |
| Kolumny Max | 1* | 4 | 4 | |

i sprawdza, czy ma punkt siodłowy. Jednak największa wartość minimów wierszy (−2) nie jest równa najmniejszej wartości maksimów kolumn (1); dlatego macierz nie ma punktu siodłowego. Przed wyszukaniem odpowiedniej strategii spostrzega, że strategia Kershaw *f* jest podporządkowana jego strategii *t*, czyli litera *t* jest gorsza dla Kershawa niż litera *f* przy porównywaniu poszczególnych kratek. Dlatego Kershaw nie będzie najprawdopodobniej stosował litery *t*. W rezultacie do rozważenia pozostaje macierz

*Kershaw*

| Goldsen | *f* | *x* | Częstotliwości Goldsena |
|---|---|---|---|
| *a* | −2 | 4 | 3 |
| *i* | 1 | −2 | 6 |
| | 6 | 3 | |

*Częstotliwości Kershawa*

z której wynika jasno, że Goldsen, powinien w sposób dowolny wybierać *a* i *i* w stosunku 3 : 6 (lub 1 : 2). Kershaw, który zaproponował grę, wie, że powinien wybierać litery *f*, *t*, *x* z częstotliwościami 6 : 0 : 3, tzn. powinien dwukrotnie częściej wybierać literę *f* niż *x* i nigdy nie wybierać litery *t*.

Goldsen jednak nie zdecydował się jeszcze, czy chce, czy też nie chce zasiąść do gry.

— „Zaczekaj jeszcze chwilę, stary koniu, obliczę cenę gry, może znajdę jakiś haczyk — powiedział pod nosem — A więc: jeśli on mówi *f* ja wygrywam średnio około $\frac{1\times(-2)+2\times1}{3}=0$. Niewiele, ale nie tak źle. Jeśli wybierze *t* (a mam nadzieję, że to zrobi) to otrzymam $\frac{1\times1+2\times4}{3}=3$ dolary. To już nieźle ... Jeśli wybierze *x*, to otrzymam $\frac{1\times4+2\times(-2)}{3}=0$ dolarów. Hm, ... wydaje się, że to wyjątkowo sprawiedliwa gra, czym mnie zdumiewasz. Gramy?"

**P r z y k ł a d 12 — Sprzęt sportowy:** Dwaj carscy gwardziści (nazwiemy ich A i B, choć ich prawdziwe imiona

są inne) otrzymali w klubie oficerskim skrzynkę ze sprzętem sportowym. Zawierała kilka paczek papierosów Pall-Mall, rewolwer, jedną kulę i reguły gry w rosyjską ruletkę (ciekawe, że Rosjanie nazywają ją często „francuską", Francuzi — „hiszpańską"[12] itd). Na początku partii każdy gracz stawia paczkę papierosów. Jako starszy rangą A ma pierwszy ruch. Może on dodać dwie paczki do banku i dać rewolwer B lub też dodać jedną paczkę, pokręcić bębenek, wypróbować strzał w własną głowę i — jeśli Bóg tak zechce — wręczyć rewolwer swemu partnerowi. Jeśli B otrzyma rewolwer ma podobną alternatywę: może oddać rewolwer z powrotem, dodając oczywiście dwie paczki do banku lub też pozostawić jedną paczkę i wypróbować rewolwer na sobie. Po tym partia jest skończona. Każdy z graczy otrzymuje połowę banku, jeśli jest to oczywiście wykonalne. W przeciwnym przypadku, ten który ocalał, zabiera cały bank.

Gracz A ma dwie strategie: 1) może pasować lub 2) grać. B ma cztery strategie: 1) może pasować, nie zwracając uwagi na decyzję A, lub 2) może grać, także nie biorąc pod uwagę, co zrobi A, lub 3) może powtórzyć to, co zrobił przeciwnik, czy wreszcie 4) może zrobić na odwrót jak A.

Zrobienie macierzy wypłat tej gry jest już dla nas dziecinnie łatwe[13].

Oto ta macierz:

| | | *A* 1 | *A* 2 | *Wiersze Min* |
|---|---|---|---|---|
| *B* | 1 | 0 | $-1/12$ | $-1/12$ |
| *B* | 2 | $1/12$ | $1/18$ | $1/18$* |
| *B* | 3 | 0 | $1/18$ | 0 |
| *B* | 4 | $1/12$ | $-1/12$ | $-1/12$ |
| *Kolumny Max* | | $1/12$ | $1/18$* | |

Maksimin i minimaks są równe, a więc gra posiada punkt siodłowy dla strategii B 2, A 2. Znaczy to, że zarówno A, jak i B powinni zawsze grać. Oznacza to także, że gra jest nieuczciwa w stosunku do A.

Nasza gra jest czymś więcej niż prostym przykładem

jeszcze jednej gry $2 \times m$, ponieważ posiada pewną szczególną cechę: w chwili, gdy gracze podejmują decyzję, mają już pełną informację o tym, co zaszło przedtem. Analiza zrobiona przez matematyków wykazała, że *każda gra z pełną informacją ma punkt siodłowy*. Dlatego nie jest rzeczą dziwną, że znalazł się i w naszej grze. Takie gry mogą mieć nieraz rozwiązanie także w postaci strategii mieszanych.

Innym przykładem gier z pełną informacją są szachy. Przy grze w szachy zawsze istnieje jedna czysta strategia, co najmniej równie dobra jak dowolna mieszana strategia. Tej czystej strategii z punktem siodłowym nie znamy, nie wiemy również, czy prowadzi do wygranej białych, czarnych, czy też do remisu; jest to gra zbyt skomplikowana i zbyt trudna do analizy. Nawet proste wymienienie wszystkich strategii jest zupełnie niemożliwe, ponieważ ich przybliżona liczba zawiera więcej zer, niż moglibyśmy napisać w ciągu całego naszego życia. Jeśli znalibyśmy to rozwiązanie, w grze takiej nie byłoby nic interesującego.

Brydż i poker, których także nie możemy tutaj dokładnie analizować, nie są grami z pełną informacją. Rezultat zdarzenia losowego — rozdania kart — jest tylko częściowo znany uczestnikom gry przy rozgrywaniu partii: dobra gra musi niewątpliwie składać się z mieszanych strategii.

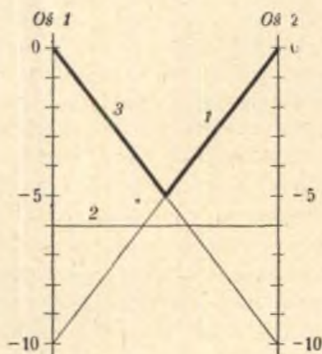
**Przykład 13 — Najwyższa jakość:** Firma Gunning i Kappler produkuje doskonałe wzmacniacze odtwarzające dźwięk w zakresie ponad 10 000 Hz (najlepiej ocenią to fachowcy). Praca wzmacniacza zależy od parametrów niewielkiego, lecz kosztownego kondensatora. Kondensator kosztuje firmę normalnie 1 dolara, lecz traci ona 10 dolarów przy wymianie wadliwego kondensatora.

Rozwiązując ten problem Gunning i Kapler mają kilka wersji. Firma może kupować gwarantowane kondensatory najwyższej jakości po 6 dolarów; podniosłyby się koszty kondensatora, ale spadły koszty napraw wzmacniaczy. Można też kupować kondensatory ubezpieczone, których polisa głosi: „Jeśli zespuły się z winy producenta,

pokrywa on koszty i zwraca pieniądze". To cacko kosztuje 10 dolarów. Problem sprowadza się do gry 3 × 2:

| Gunning i Kappler | Natura: bez usterki | Natura: z usterką |
|---|---|---|
| (1) tania | −10 | −1 |
| (2) gwarantowana | −6 | −6 |
| (3) ubezpieczona | 0 | −10 |

Za pomocą metody graficznej (lub metody prób, jeśli uznamy ją za dogodniejszą)




znajdujemy, że odpowiednimi strategiami są tu 1 i 3. Dlatego obliczamy dla nich względne częstotliwości:

| G i K | Natura: bez usterki | Natura: z usterką | Częstotliwości G i K |
|---|---|---|---|
| 1 | −10 | −1 | 10 |
| 3 | 0 | −10 | 9 |

które wynoszą 10 : 9. Czyli mieszana strategia dla pierwotnej gry będzie 10 : 0 : 9. Innymi słowy, za każdym razem, gdy firma montuje kondensatory, powinna pozostawić przypadkowi użycie taniego kondensatora za 1 dolara, lub drugiego, ubezpieczonego kondensatora, przy czym względne częstotliwości przychylają się nieco ku temu poprzedniemu. Firma nie powinna kupować kondensatorów po 6 dolarów.

Cena gry równa jest

$$\frac{10\times(-10)+9\times0}{10+9}=-5\frac{5}{19}$$

Zatem średni koszt przypadający na każdy wzmacniacz wynosi mniej więcej 5 dolarów i 26 centów.

## Mechanizmy losowe

Ciekawe jest — po prostu jako problem praktyczny — gdzie znaleźć taki mechanizm losowy, który podawałby względne częstotliwości niezbędne w grach ze strategiami mieszanymi. Podrzucanie monety można stosować przy względnych częstotliwościach 1 do 1; kość do gry może pomóc przy częstotliwościach 1 do 5; 2 do 4 itd., aż do 5 do 1; talia kart — 1 do 12 (np. asy przeciw nie asom), 3 do 10 (np. figury przeciw blotkom) itd.; wskazówka sekundnika może dokonale służyć dla wyboru przypadkowych liczb od zera do 59, pod warunkiem że nie patrzyliśmy przed chwilą na zegarek i nie znamy z góry odpowiedzi, nawet przybliżonej. Lecz w praktyce możemy potrzebować dowolnych kombinacji liczb jako częstotliwości względnych i powinniśmy poznać ogólną metodę ich wyznaczania. Urządzimy więc krótką wycieczkę w te rejony.

Mechanizmem spełniającym powyższy warunek jest tablica liczb przypadkowych. Próbka takiej tablicy podana jest niżej.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 35 | 07 | 53 | 39 | 49 |
| 56 | 62 | 33 | 44 | 42 |
| 36 | 40 | 98 | 32 | 32 |
| 57 | 62 | 05 | 26 | 06 |
| 07 | 39 | 93 | 74 | 08 |
| 68 | 98 | 00 | 53 | 39 |
| 14 | 45 | 40 | 45 | 04 |
| 07 | 48 | 18 | 38 | 28 |
| 27 | 49 | 99 | 87 | 48 |
| 35 | 90 | 29 | 13 | 86 |

Zgrupowanie liczb parami ma tylko takie znaczenie, iż zapobiega oczopląsowi. Możemy zacząć od dowolnego punktu podobnej dużej tablicy, czytać liczby od góry lub od dołu, od prawej lub od lewej, grupować je po jednej, dwie, trzy lub więcej, i zawsze rezultat będzie ten sam: bezsens, nieoczekiwane, przypadkowe. Chociaż dla otrzymania tych cyfr przeprowadzono poważną pracę umysłową, przypuszcza się, że w samych liczbach nie ma żadnego sensu. (Przytoczona tablica jest częścią tablicy z miliona liczb przypadkowych, otrzymanych za pomocą specjalnej elektronowej superruletki. Niewielką część tej tablicy przytoczono w *Dodatku.)*

Nie możemy sami, z głowy, wypisać przypadkowego szeregu liczb. Przyzwyczajenia, przesądy, zamiłowanie do porządku itd. — będą temu przeszkadzać. Najlepszy wynik uzyskalibyśmy zmuszając do pisania liczb idiotę (w pełnym, medycznym sensie tego słowa).

Jak stosować tę tablicę, by otrzymać pożądane względne częstotliwości? Dla przykładu weźmiemy względne częstotliwości 5 : 2. Aby znaleźć punkt w tablicy, z którego rozpoczniemy czytać liczby przypadkowe, wskażmy na chybił trafił parę razy palcem w tę tablicę i określmy numery stronic, wiersza i kolumny; teraz znajdźmy stronicę, kolumnę i liczbę. Powiedzmy, że wypadła dziesiąta liczba ósmej kolumny na pierwszej stronicy. Jeśli ta liczba równa jest 0, 1, 2, 3 lub 4, to stosujemy w grze strategię 1. Jeśli równa jest 5 lub 6 — to stosujmy strategię 2. Jeśli równa jest 7, 8 lub 9, to odrzućmy tę liczbę i weźmy liczbę u dołu (lub u góry, tylko postanówmy to wcześniej) i zastosujmy ją dla określenia numeru strategii. Do następnej partii gry (jeśli jest w planie) wykorzystajmy liczby pod ostatnią już zastosowaną i postępujmy jak uprzednio, przyjmując strategię 1, jeśli liczba równa jest 0, 1, 2, 3 lub 4; strategię 2, jeśli równa jest 5 lub 6 i przechodząc na następny wiersz (w górę lub w dół zgodnie z przyjętym uprzednio założeniem), jeśli równa jest 7, 8 lub 9. Podobnie, jeśli względne częstotliwości gry równe są 85 do 9, określmy ponownie początkową parę liczb. Jeśli jest ona liczbą w granicach od 00 do 84, stosujmy strategię 1. Jeśli leży w zakresie od 85 do 93 — strategię 2.

Jeśli zaś znajduje się w granicach od 94 do 99 — to zapomnijmy o niej i weźmy kolejną parę.

Czasami drobne zmiany tej metody są zalecane. Na przykład, przy względnych częstotliwościach 7 do 4, kiedy suma równa jest 11, winniśmy zastosować przypadkowe liczby dwucyfrowe z zakresu od 0 do 99. W takim przypadku musielibyśmy odrzucać wszystkie liczby od 11 do 99 i nasza praca byłaby bardzo nieproduktywna. Nawet jeśli jesteśmy bogaci w liczby przypadkowe, to ich drobiazgowa ocena i odrzucanie pochłonie masę czasu. Musimy sobie ułatwić życie: podzielmy największą dwucyfrową liczbę (tj. 99) przez sumę względnych częstotliwości, tzn. 11. Odpowiedź równa jest wówczas 9. Na ogół będzie to liczba całkowita plus ułamek. Pomnóżmy teraz względne częstotliwości przez tę liczbę, czyli 9. Otrzymamy: $7 \times 9 = 63$ i $4 \times 9 = 36$. Liczby te stanowią podstawę dla określenia zastosowania względnych częstotliwości. Strategia 1 obowiązuje dla liczby w zakresie od 00 do 62, i strategię 2 dla liczb w zakresie od 63 do 98. Liczba 99 będzie odrzucana.

## Podsumowanie metod rozwiązywania gier $2 \times m$

Zanim pozostaniemy sam na sam z ćwiczeniami powtórzmy krótko technikę rozwiązywania gier $2 \times m$.

Mamy następującą grę:

| Niebieski \ *Czerwony* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | −4 | −2 | 3 | 4 |
| 2 | 6 | 5 | 0 | 1 |

Czy istnieje punkt siodłowy? Zbadajmy macierz na maksyminy i minimaksy:

| *Niebieski* \ *Czerwony* | 1 | 2 | 3 | 4 | *Wiersze Min* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −4 | −2 | 3 | 4 | −4 |
| 2 | 6 | 5 | 0 | 1 | 0* |
| *Kolumny Max* | 6 | 5 | 3* | 4 | |

| | *Czerwony* 1 | 3 |
|---|---|---|
| | −10 | 3 |

Tak więc, optymalna mieszana strategia Niebieskiego oparta jest na względnych częstotliwościach 6 : 7, zaś dla Czerwonego na względnych częstotliwościach 3 : 10. Wracając do pierwotnej gry $2 \times 4$ widzimy, że optymalna strategia Niebieskiego powinna być $6 \times 7$, zaś Czerwonego 3 : 0 : 10 : 0.

Cenę gry można wyznaczyć stosując strategię Niebieskiego 6 : 7 przeciw dowolnej czystej strategii Czerwonego wchodzącej w optymalną mieszaną strategię, tzn. przeciw strategii Czerwony 1 i Czerwony 3. Przy strategii Czerwony 1 dowiemy się, że cena gry równa jest:

$$\frac{6\times(-4)+7\times6}{6\times7}=\frac{18}{13}$$

## Ćwiczenie 2

Określić względne częstotliwości i cenę następujących gier:

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 0 | 3 |
| 2 | 2 | −1 | −6 |

*1*

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | −6 | −5 | −1 |
| 2 | −3 | −7 | −6 | −2 |

*2*

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 6 | 7 | 1 |

*3*

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 18 | 21 | 30 | 21 | 20 | 21 | 23 |
| 2 | 21 | 30 | 21 | 23 | 21 | 17 | 18 | 20 |

*4*

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 3 | 2 | 2 |

*5*

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 7 | 11 | 0 |
| 2 | −8 | −2 | −9 | 1 |

*6*

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | −2 | 3 | 7 | 0 |
| 2 | 0 | 5 | 2 | 2 | 6 |

*7*

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −3 | 5 | −7 | 9 |
| 2 | −2 | 4 | −6 | 8 | −10 |

*8*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 3 | −5 | 7 | −9 |
| 2 | 2 | −1 | 6 | −8 | 10 |

*9*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | −5 | 7 | 1 | −3 |
| 2 | −10 | 1 | −8 | −6 | 2 |

*10*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 0 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 6 | 3 | 1 |

*11*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 6 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 7 |

*12*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 9 | 8 | 7 | 4 | 2 |
| 2 | 10 | 1 | 2 | 3 | 6 | 8 |

*13*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 9 | 11 |

*14*

**Czerwony**

| Niebieski | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 |
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 2 |
| 5 | 5 | 1 |

*15*

**Czerwony**

| Niebieski | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | −1 | −3 |
| 2 | −5 | −7 |
| 3 | −9 | −11 |

*16*

**Czerwony**

| Niebieski | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | −2 | 3 |
| 2 | 3 | −2 |
| 3 | 0 | 0 |

*17*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | −2 | 3 |
| 2 | 3 | −2 |
| 3 | 1 | 1 |

*18*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | −1 | 5 |
| 2 | −3 | 1 |
| 3 | 0 | −3 |
| 4 | −3 | 0 |
| 5 | 1 | −3 |
| 6 | 5 | −1 |

*19*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 1 |
| 2 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 3 |
| 4 | 5 | 9 |
| 5 | 6 | 7 |

*20*

# 3

# Gry z trzema strategiami

## Część I: Gry $3 \times 3$

### Dyskusja umoralniająca

Bardzo trudno objaśniać rozwiązywanie dużych gier, np. $10 \times 10$, stojąc na wąskiej kładce arytmetyki zamiast na szerokim gruncie wyższej matematyki. Napotkane trudności można porównać z trudnościami nauczenia mądrego lecz zupełnie niewykształconego dziecka, jak przedstawić wierszem nazwy plemion Indian amerykańskich, przy czym instrukcję przekazywałoby przez telefon, w jakimś rzadkim dialekcie, inne dziecko. Kontynuując tę analogię można powiedzieć, że nauczyć się rozwiązywać gry $3 \times 3$ to to samo, co nauczyć się pisać słowo KOT, stosując dla nauki podobne środki. Mamy nadzieję, że autor i Czytelnik będą współdziałać ze sobą przy pokonywaniu tych trudności.

Przed przystąpieniem do badania gier $3 \times 3$ celowy będzie może krótki opis techniki rozwiązywania problemu, którym się zajmiemy. Jak stosować teorię gier w konfliktowej sytuacji, w której istnieje parę możliwych rozwiązań?

Przede wszystkim wymieńmy *wszystkie* możliwości (kolejne wybory), stojące zarówno przed nami, jak i przed naszym przeciwnikiem. Włączyć trzeba przy tym do analizy zdarzenia losowe, które wykorzysta Natura, jeśli

tylko nadarzy się jej okazja. Mówiąc dosłownie, pierwszy krok jest zwykle niemożliwy, lecz może stać się możliwy i właściwy, jeśli rozpatrzymy tylko te możliwości, które istotnie mają ważne znaczenie. Właśnie w tym punkcie kunszt i zdrowy rozsądek tworzącego model matematyczny człowieka, poddany zostaje najpoważniejszej próbie. Każdy dureń może w danej sytuacji wymienić tyle czynników, że sam Pan Bóg nie umiałby ich przeanalizować. Na przykład, Newton winien był wziąć pod uwagę, że planety są nieco spłaszczone na biegunach, i że na niektórych są góry, i że co najmniej jedna z nich pokryta jest drzewami, że istnieją na nich termity i inne przyjemne i nieprzyjemne rzeczy. Zdrowy rozsądek musi podpowiedzieć, w którym miejscu przerwać wymienianie tych czynników. W praktyce powinniśmy przerwać wymienianie, gdy tylko zdrowy rozsądek podpowie, że model ma już dostatecznie dużo czynników po to, by za ich pomocą dowiedzieć się czegoś o interesującym nas zagadnieniu.

Po wymienieniu strategii graczy, trzeba obliczyć lub ocenić wypłaty związane z każdą strategią Niebieskiego i Czerwonego (uwzględnianych parami), lub też domyśleć się jakie one są. Nierzadko wypłaty te ustalone są przez reguły gry. Nieraz musimy obliczyć je za pomocą teorii prawdopodobieństwa lub jakiejś innej metody logicznej dedukcji. Innym razem — a w życiu zdarza się to kłopotliwie często — musimy przywołać cały nasz zdrowy rozsądek, by ocenić te wypłaty i zaproponować ich wielkości. Są one jednak nieodzowne, i to w formie liczb, zanim rozpoczniemy dalszą wędrówkę. (Pewne możliwości w tym zakresie rozpatrzone są w paru przykładach, które spotkamy w książce i nieco dokładniej w dwóch paragrafach rozpoczynających się na s. 198).

Mając wypłaty, można napisać macierz wypłat i rozpocząć analizę. Jaki jest jej cel? Chodzi o to, by określić najlepszy sposób prowadzenia danej gry i wysokość ceny w tej grze, tzn. dowiedzieć się, ile możemy wygrać lub przegrać, jeśli my i nasz przeciwnik będziemy grać poprawnie. Pytanie „jak grać", jest równoznaczne z pytaniem, „jaką strategię stosować", lub „jakie strategie sto-

sować" aby — stosując odpowiedni mechanizm losowy (którego cechy musimy określić) — wybrać te, które należy przyjąć w każdej z danych partii. A teraz wróćmy do rzeczy. Niektóre z gier 3 × 3 rozwiązuje się w sposób prosty. Inne — nie. Będziemy skazani na wypróbowanie różnych metod za każdym razem, kiedy spotkamy nową grę; zachętą może być tylko niezachwiana pewność, że takie rozwiązanie naprawdę istnieje. Na szczęście, wiele z tych gier można sprowadzić do znanych nam już gier 2 × 2. Na nieszczęście, tej części, która nie sprowadza się do gier 2 × 2, trzeba będzie nauczyć się na pamięć, niczym w czasach elementarza. Bardzo to nieprzyjemne, lecz — jak sądzę — konieczne, ponieważ w naszym przypadku proste reguły zastępują skomplikowane rozważania matematyczne. W końcu, gdy parę lat temu nauczyliśmy się wyciągać pierwiastek kwadratowy z liczby, prawdopodobnie nie mieliśmy zielonego pojęcia, jak w istocie przebiega ten proces. W każdym razie autor tej książki nic o tym nie wiedział. Ostatecznie także wielu kierowców samochodów nie zna rzetelnie zasad funkcjonowania silników spalinowych.

## Punkty siodłowe

Najpierw należy sprawdzić, czy jest punkt siodłowy, z nadzieją, że się go znajdzie. Ta procedura jest bardzo prosta i bezbolesna. Na przykład, gra może mieć następującą formę:

| | | *Czerwony* 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* | 1 | 3 | 0 | 2 |
| | 2 | −4 | −1 | 3 |
| | 3 | 2 | −2 | −1 |

Rzućmy okiem na macierz, znajdźmy minimum każdego wiersza, oznaczmy największe z nich. Podobnie znajdźmy maksimum każdej kolumny i oznaczmy najmniejsze z nich. To nam da:

| | Czerwony 1 | Czerwony 2 | Czerwony 3 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|
| Niebieski 1 | 3 | 0 | 2 | 0* |
| Niebieski 2 | −4 | −1 | 3 | −4 |
| Niebieski 3 | 2 | −2 | −1 | −2 |
| Kolumny Max | 3 | 0* | 3 | |

Jeśli dwie oznaczone liczby są równe, jak w naszym przykładzie, to pracę skończyliśmy, ponieważ określają one optymalną strategię każdego gracza. Jeśli istnieje punkt siodłowy, to każdy gracz powinien stosować tę czystą strategię, która odpowiada punktowi siodłowemu — w naszym przypadku Niebieski 1 i Czerwony 2. Co więcej, liczby z gwiazdką oznaczają cenę gry. W naszym przypadku cena = 0, tzn. gra jest sprawiedliwa dla obu stron. Zwróćmy uwagę, że nikt z graczy nie straci, jeśli będzie przez cały czas stosować swoją optymalną strategię, lecz natychmiast poniesie straty, gdy zejdzie z drogi cnoty.

## Dominowanie

Rozpatrzmy teraz taką grę:

| | Czerwony 1 | Czerwony 2 | Czerwony 3 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|
| Niebieski 1 | 3 | 0 | 2 | 0 |
| Niebieski 2 | 4 | 5 | 1 | 1* |
| Niebieski 3 | 2 | 3 | −1 | −1 |
| Kolumny Max | 4 | 5 | 2* | |

Ten zbiór liczb nie wygląda ani lepiej, ani gorzej niż macierz poprzedniej gry i dlatego spróbujmy znaleźć punkt siodłowy. Wiersze dają maksimin równy 1, zaś kolumny — minimaks równy 2. Nasza praca na nic. Ale niezupełnie: ponieważ *te dwie liczby mówią nam, że cena gry jest większa niż 1 i mniejsza niż 2.*

Sprawdźmy grę na istnienie strategii dominujących: rozpatrzmy, czy nie ma takiej czystej strategii, której

zastosowanie byłoby patentowanym głupstwem dla Niebieskiego (lub Czerwonego).

Niebieski chce, aby wypłata była możliwie duża. Zauważmy — porównując poszczególne kratki — że strategia Niebieski 2 jest lepsza niż strategia Niebieski 3. W takim razie, po co w ogóle rozpatrywać strategię Niebieski 3? Wykreślmy ją. Podobnie z Czerwonym; chce możliwie mało wypłacić (Niebieskiemu) i dlatego strategia Czerwony 1 jest zawsze gorsza niż strategia Czerwony 3. Wyłączamy ją zatem z rozważań.

W rezultacie tych operacji otrzymaliśmy grę 2 × 2; a mianowicie:

| Niebieski \ *Czerwony* | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | 5 | 1 |

którą umiemy rozwiązywać, tj.

| Niebieski \ *Czerwony* | 2 | 3 | *Częstotliwości Nieb.* |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 4 |
| 2 | 5 | 1 | 2 |
| *Częstotliwości Czerw.* | 1 | 5 | |

Dlatego rozwiązanie gry 3 × 3 będzie:

| Niebieski \ *Czerwony* | 1 | 2 | 3 | *Częstotliwości Nieb.* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 | 2 | 4 |
| 2 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | −1 | 0 |
| *Częstotliwości Czerw.* | 0 | 1 | 5 | |

Niebieski powinien stosować swoje strategie zgodnie ze względnymi częstotliwościami 4 : 2 : 0, zaś Czerwony — ze względnymi częstotliwościami 0 : 1 : 5. Częstotliwość równa zeru oznacza oczywiście, że ta strategia w ogóle nie jest stosowana.

Jeśli na podstawie dominowania udałoby się nam wykluczyć tylko jedną strategię, to pozostałaby gra $2 \times 3$ zamiast gry $2 \times 2$, lecz umiemy już rozwiązywać i takie gry.

Pojęcie dominowania — podobnie jak pojęcie punktu siodłowego dla gier $3 \times 3$ — jest takie same jak dla gier $2 \times m$. Stąd wnioski: jeśli gra $3 \times 3$ ma punkt siodłowy, optymalna strategia jest jedną z czystych strategii. Jeśli nie ma punktu siodłowego, lecz istnieje dominujący wiersz lub kolumna (lub jedno i drugie), to optymalną strategią jest strategia mieszana, oparta na dwu czystych strategiach.

## Cena gry

Średnią cenę gry $3 \times 3$, tzn. cenę, którą może zagwarantować dobra gra — jeśli trwą dostatecznie długo — można również znaleźć poprzez naturalne rozszerzenie metody zastosowanej w grach $2 \times 2$. (Obliczmy średnią wypłatę, jeśli np. optymalny miks Niebieskiego stosowany jest przeciwko jednej z czystych strategii Czerwonego wchodzącej w jego najlepszą strategię mieszaną). Na przykład, w ostatnim przykładzie Niebieski grając przeciw strategii Czerwony 2 otrzyma średnio:

$$\frac{4\times0+2\times5+0\times3}{4+2+0}=\frac{5}{3}$$

Cena gry będzie taka sama przy grze przeciw strategii Czerwony 3. Optymalny miks Czerwonego utrzyma jego straty na poziomie $^5/_3$ przy grze zarówno przeciw strategii Niebieski 1, jak i przeciw strategii Niebieski 2.

Jeśli jeden z graczy zastosuje jedną z odrzuconych strategii (Niebieski 3 lub Czerwony 1), to rezultat będzie gorszy. Na przykład, takie wykroczenie Czerwonego da Niebieskiemu

$$\frac{4\times3+2\times4+0\times2}{4+2+0}=\frac{10}{3}$$

Jeśli zaś potknie się Niebieski — to jego wypłata będzie

$$\frac{0\times2+1\times3+5\times(-1)}{0+1+5}=-\frac{1}{3}$$

tzn. Czerwonemu uda się wygrać 1/3 w grze, która w zasadzie jest dla niego niesprawiedliwa. Jak widać, dobrnęliśmy do gier, w których zły gracz nie może liczyć na to, że jego przeciwnik stosuje optymalną strategię, aby utrzymać cenę gry, tak jak to było w grach 2 × 2 z mieszanymi strategiami. W skomplikowanych grach fakt, że przeciwnik gra z głową, nie usprawiedliwia nas, jeśli nie używamy swojej. Na odwrót, jak tego należało oczekiwać, musimy płacić za własny nierozsądek.

## Trzy strategie aktywne

Do tej pory rozpatrywaliśmy rozwiązywanie gier 3 × 3, bądź z jedną aktywną strategią (gdy istniał punkt siodłowy), bądź też z dwiema aktywnymi strategiami (przy dominowaniu). Teraz odkryjemy tajemnicę rozwiązywania gier 3 × 3, w których istnieją trzy aktywne strategie. Jak zwykle, najpierw trzeba sprawdzić grę na istnienie punktu siodłowego lub dominowanie, ponieważ istnienie jednego z nich wyklucza skuteczność stosowania naszej metody; zupełnie jak w chirurgii, gdzie operacja to środek (prawie) ostateczny, który należy stosować tylko wówczas, gdy wszystkie lekarstwa zawiodły.

Rozpatrzmy grę:

| | *Czerwony* 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| *Niebieski* 1 | 6 | 0 | 6 |
| 2 | 8 | −2 | 0 |
| 3 | 4 | 6 | 5 |

Sprawdzamy, że — niestety — nie ma punktu siodłowego i dominowania. Czas więc i na nowe reguły.

Na początek skupmy uwagę na Czerwonym i określmy częstotliwości, z którymi powinien stosować swoje strategie. Przede wszystkim odejmiemy każdy wiersz od po-

przedniego, tj. każdą wypłatę od wypłaty, która znajduje się nad nią, i zapiszemy rezultaty odejmowania w nowej grupie klatek:

*Czerwony*

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| −2 | 2 | 6 |
| 4 | −8 | −5 |

Częstotliwość Czerwony 1 określają liczby w zakreskowanych kratkach (otrzymanych po wykreśleniu kolumny Czerwony 1 w poprzedniej macierzy):

*Czerwony*

| 1 | | |
|---|---|---|
| | 2 | 6 |
| | −8 | −5 |

Liczbowa wartość częstotliwości równa jest różnicy między iloczynami liczb na przekątnych:

| | |
|---|---|
| 2 | |
| | −5 |

*minus*

| | |
|---|---|
| | 6 |
| −8 | |

tj.: $2 \times (-5) - 6 \times (-8) = 38$

Liczba 38 jest względną częstotliwością Czerwony 1. Gdyby się okazało, że jest równa − 38, to nie zwracalibyśmy uwagi na znak minus i upieralibyśmy się przy 38 jako liczbie szukanej. Jednakże dopóki nie zakończyliśmy obliczeń względnych częstotliwości, uważajmy na wszystkie znaki.

Dokładnie tak samo możemy otrzymać względne częstotliwości dla Czerwony 2 i Czerwony 3. Dla strategii Czerwony 2, wykreśliliśmy kolumnę Czerwony 2 w zakreskowanej macierzy, w rezultacie czego otrzymaliśmy:

*Czerwony*

| | 2 | |
|---|---|---|
| −2 | | 6 |
| 4 | | −5 |

Z tej macierzy widzimy, że częstotliwość dla Czerwony 2, określona jest macierzą

| | |
|---|---|
| −2 | 6 |
| 4 | −5 |

Tu różnica iloczynów na przekątnych równa się:

$$(-2) \times (-5) - 4 \times 6 = -14$$

Czyli częstotliwość strategii Czerwony 2 równa jest 14. Podobnie znajdujemy, że częstotliwość dla Czerwony 3 równa jest 8. W rezultacie dowiadujemy się, że optymalną mieszaną strategię Czerwonego określają względne częstotliwości 38 : 14 : 8.

Optymalną mieszaną strategię Niebieskiego znajdziemy w podobny sposób rozpatrując kolumny zamiast wierszy. Odejmując każdą kolumnę od poprzedniej, to jest każdą wypłatę od wypłaty z jej lewej strony, otrzymamy macierz

| Niebieski | | |
|---|---|---|
| 1 | 6 | −6 |
| 2 | 10 | −2 |
| 3 | −2 | 1 |

Częstotliwość dla Niebieski 1 znajdujemy w macierzy

| Niebieski | | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| | 10 | −2 |
| | −2 | 1 |

co daje wartość $10 \times 1 - (-2) \times (-2) = 6$. Zupełnie tak samo znajdujemy częstotliwości 6 i 48 dla Niebieski 2 i Niebieski 3; a więc optymalną mieszaną strategię określają liczby 6 : 6 : 48.

A więc znaleźliśmy — miejmy nadzieję[14] — poszukiwane rozwiązanie; a mianowicie:

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 0 | 6 | 6 |
| 2 | 8 | −2 | 0 | 6 |
| 3 | 4 | 6 | 5 | 48 |
| Częstotliwości Czerw. | 38 | 14 | 8 | |

Można dokonać uproszczenia przez wspólny mnożnik obu grup liczb względnych; upraszczając przez 6 otrzymamy dla Niebieskiego względne częstotliwości 1 : 1 : 8; dla Czerwonego — skracając przez 2 — otrzymamy częstotliwość 19 : 7 : 4.

Ostatnim etapem rozwiązywania gry z trzema aktywnymi strategiami — i to *bardzo istotnym etapem* — jest sprawdzenie, czy znalezione częstotliwości względne rzeczywiście posiadają niezbędne cechy poprawnego rozwiązania? Przypomnijmy, że optymalna mieszana strategia danego gracza powinna zabezpieczać jedną i tę samą wypłatę przeciw każdej z czystych strategii przeciwnika wchodzących w jego optymalne mieszane strategie, tzn. przeciw wszystkim jego strategiom w danym przypadku. Obliczenia są łatwe.

Jeśli Niebieski stosuje mieszaną strategię 1 : 1 : 8 przeciw Czerwony 1, to jego średnia wygrana będzie równa

$$\frac{1\times6+1\times8+8\times4}{1+1+8}=\frac{23}{5}$$

Grając przeciw Czerwony 2 otrzyma także

$$\frac{1\times0+1\times(-2)+8\times6}{1+1+8}=\frac{23}{5}$$

zaś przeciw Czerwony 3

$$\frac{1\times6+1\times0+8\times5}{1+1+8}=\frac{23}{5}$$

Na razie wszystko jest dobrze. Sprawdźmy z kolei mieszaną strategię Czerwonego 19 : 7 : 4 przeciw Niebieski 1. Okazuje się, że straci

$$\frac{19\times6+7\times0+4\times6}{19+7+4}=\frac{23}{5}$$

tyleż samo przeciw Niebieski 2 i Niebieski 3.

Rozwiązaliśmy już grę i jej cena równa jest $^{23}/_{5}$, czyli $4^{3}/_{5}$. Mamy pewność, że rozwiązanie jest poprawne, ponieważ średnia wypłata nie zmienia się, gdy mieszana strategia któregoś z graczy jest przeciwstawiona dowolnej czystej strategii, wchodzącej w skład optymalnej strategii mieszanej kontrpartnera.

## Gry, z którymi lepiej się nie spotykać

Od czasu do czasu spotyka się jednak przypadki, w których cały arsenał środków rozwiązywania gier 3 × 3 jest do niczego. Innymi słowy w macierzach wypłat pewnych gier istnieją subtelności ograniczające uniwersalność proponowanych wyżej metod.

Krótko zilustrujemy tę sytuację na przykładzie [15]. Przypomnijmy sobie pewne aspekty dominowania. Niektóre czyste strategie mogą być w oczywisty sposób gorsze od innych. Dlatego nie należy ich stosować. Jednakże może istnieć taka czysta strategia, która jest gorsza od pewnej udanej mieszaniny innych czystych strategii i dlatego także nie powinno się jej stosować. W takich przypadkach nasze metody zawodzą. Są i inne kłopoty — podobne zresztą do rozpatrzonego powyżej — które też mogą być przyczyną niepowodzenia. Potrafimy im jednak zaradzić.

Fiasko zastosowania metody gry 3 × 3 związane jest zawsze z istnieniem zakazanych strategii. Z pewnych przyczyn — nieraz niejasnych — ta czy inna czysta strategia powinna być pominięta. I to jest klucz do naszej metody.

*Wyłączmy jakąkolwiek strategię a następnie rozwiążmy pozostałą grę.* Potem spróbujmy zastosować to rozwiązanie w pierwotnej grze. Jeśli wyjdzie — zwyciężyliśmy. Jeśli nie, spróbujmy wyłączyć jakąś inną strategię. Znowu znajdziemy rozwiązanie pozostałej gry i podstawmy to rozwiązanie do gry pierwotnej. Musi nam się w końcu udać.

Rozpatrzmy następującą grę:

| | | *Czerwony* 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* | 1 | 6 | 0 | 3 |
| | 2 | 8 | -2 | 3 |
| | 3 | 4 | 6 | 5 |

Wygląda niegorzej niż poprzedni przykład. Istotnie, zmienione są tylko dwie liczby. Jak zwykle szukamy punktu siodłowego i dominowania: nie ma. Z kolei sto-

sujemy metodę rozwiązania gier z trzema aktywnymi strategiami opisaną w poprzednim rozdziale i znajdujemy odpowiedź 0 : 0 : 0 dla Niebieskiego i 4 : 4 : 8 dla Czerwonego. Tu zaczynają się przykrości. Okazuje się bowiem, że Niebieski nie ma ochoty zastosować żadnej z istniejących strategii, co jest po prostu niedopuszczalne; chcemy przecież wiedzieć, jak powinien grać, jeśliby grał. Mieliśmy szczęście, bo od razu widać, że coś jest nie w porządku. Względne częstotliwości mogłyby budzić zaufanie: np. 3 : 7 : 5, a naprawdę byłyby fałszywe. Wykrylibyśmy to tylko wówczas, gdybyśmy spróbowali sprawdzić rozwiązanie obliczając cenę gry itp.

Zaczniemy nasze próby poprawienia sytuacji od wyłączenia Niebieski 1. Otrzymamy grę:

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 2 | 8 | −2 | 3 |
| 3 | 4 | 6 | 5 |

Szukamy rozwiązania gry 2 × 2 dla otrzymanej gry 2 × 3. Rozpoczynając od gry

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 2 | 8 | −2 |
| 3 | 4 | 6 |

znajdziemy rozwiązanie

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | Częstotliwości Czerw. |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | −2 | 3 | 2 |
| 3 | 4 | 6 | 5 | 10 |
| Częstotliwości Nieb. | 8 | 4 | 0 | |

Podstawiamy to rozwiązanie do pierwotnej gry (po skróceniu częstotliwości przez wspólne mnożniki):

*Czerwony*

| | | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* | 1 | 6 | 0 | 3 | 0 |
| | 2 | 8 | −2 | 3 | 1 |
| | 3 | 4 | 6 | 5 | 5 |
| | | 2 | 1 | 0 | *Częstotliwości Nieb.* |

*Częstotliwości Czerw.*

Czy to jest rozwiązanie? Niebieski wygrywa

$$\frac{0\times6+1\times8+5\times4}{0+1+5}=4\frac{2}{3}$$

kontra Czerwony 1, jak i przeciw Czerwony 2 i Czerwony 3 (nie byłoby dziwne, gdyby Niebieski wygrał więcej niż $4^2/_3$ grając przeciw Czerwony 3; ale tak się po prostu nie składa). Z drugiej strony, Czerwony grając przeciw Niebieski 1 przegrywa

$$\frac{2\times6+1\times0+0\times3}{2+1}=4$$

co także jest zupełnie dopuszczalne, ponieważ Czerwony może osiągać lepszy rezultat, jeśli Niebieski stosuje strategię, która nie wchodzi w jego optymalną strategię mieszaną. Jeśli zaś Czerwony gra przeciw strategii Niebieski 2 i Niebieski 3, wówczas przegrywa dokładnie $4^2/_3$.

Tak więc mamy rozwiązanie. Każdy gracz może ręczyć, że jeśli będzie się trzymał uzyskanej strategii mieszanej (0 : 1 : 5 dla Niebieskiego i 2 : 1 : 0 dla Czerwonego), otrzyma średnią wypłatę równą $4^2/_3$ — pod warunkiem, że przeciwnik stosuje czyste strategie wchodzące w jego optymalny miks — i co najmniej $4^2/_3$, jeśli przeciwnik stosuje strategie o wątpliwej wartości.

Teraz powinniśmy, być może, rozpatrzyć zagadnienie, które od czasu do czasu wypływa na powierzchnię. Dobra gra, czyli stosowanie optymalnej mieszanej strategii np. przez Niebieskiego, stanowi nieraz gwarancję dla obu graczy, ponieważ różne sposoby gry, które mogą być stosowane przez Czerwonego, dają takie same rezultaty jak i jego optymalna mieszana strategia. Jednakże ta gwarancja jest murowana tylko dla Niebieskiego, tzn.

tylko dla gracza stosującego optymalną strategię mieszaną. Czerwony może robić, co chce, przeciw optymalnej mieszanej strategii Niebieskiego tylko wtedy, gdy jego optymalny miks (którego, jak zakładamy, nie stosuje) zawiera wszystkie czyste strategie. Tylko wówczas Czerwony może bezkarnie stosować dowolną czystą strategię, jaka by ona nie była, przeciw optymalnej mieszanej strategii Niebieskiego. Lecz jeśli pewne czyste strategie są wyłączone z optymalnej mieszanej strategii Czerwonego, to niech się nie waży stosować żadnej z tych zakazanych strategii przeciw dobremu miksowi Niebieskiego.

Tak więc, stosowanie mieszanych strategii nie oznacza automatycznego i pełnego zabezpieczenia się przeciwnika przed niepotrzebnymi stratami. Zabezpiecza tylko nas automatycznie i ostatecznie przed niepotrzebnymi stratami we wszystkich możliwych przypadkach. W dodatku zmusza przeciwnika do ponoszenia kary w tych wypadkach, gdy dysponuje i korzysta ze złych strategii. Nie gwarantuje natomiast, niestety, iż kary te będą tak ciężkie, jak to tylko możliwe.

**Przykład 14 — „Kamień — Papier — Nożyczki":** Jedną z gier, analizowaną we wczesnym okresie rozwoju teorii gier, była dziecinna zabawa: „Kamień — Papier — Nożyczki"[16]. Rozwiązanie jest intuicyjnie oczywiste; ciekawe będzie jego sprawdzenie naszymi metodami.

Dwaj gracze równocześnie wymawiają nazwę (lub pokazują gestami) jednego z trzech przedmiotów. Jeśli obydwaj wymienią ten sam przedmiot — partia kończy się remisem. W przeciwnym wypadku wygrana określona jest warunkiem, że Nożyczki kroją Papier, Kamień rozbija Nożyczki, zaś Papier okrywa Kamień. Macierz wypłat tej gry jest więc

| | | *Czerwony* | | |
|---|---|---|---|---|
| | | *nożyczki* | *papier* | *kamień* |
| *Niebieski* | *nożyczki* | 0 | 1 | -1 |
| | *papier* | -1 | 0 | 1 |
| | *kamień* | 1 | -1 | 0 |

W tej grze nie ma ani punktu siodłowego, ani dominującej strategii. Mieszaną strategię Czerwonego znajdujemy z macierzy

*Czerwony*

| *nożyczki* | *papier* | *kamień* |
|---|---|---|
| 1 | 1 | −2 |
| −2 | 1 | 1 |

którą otrzymujemy w wyniku odjęcia każdego wiersza od poprzedniego. Częstotliwość dla Nożyczek oparta jest na miecierzy

*Czerwony*

| *nożyczki* | | |
|---|---|---|
| | 1 | −2 |
| | 1 | 1 |

tj.: $1 \times 1 - 1 \times (-2) = 3$

Dla strategii Czerwony—Kamień, stosuje się macierz

*Czerwony*

| | *papier* | |
|---|---|---|
| 1 | | −2 |
| −2 | | 1 |

to jest

| | |
|---|---|
| 1 | −2 |
| −2 | 1 |

co daje

$$1 \times 1 - (-2) \times (-2) = 3$$

Dla strategii Czerwony—Kamień, stosuje się macierz

*Czerwony*

| | | *kamień* |
|---|---|---|
| 1 | 1 | |
| −2 | 1 | |

co prowadzi do

$$1 \times 1 - 1 \times (-2) = 3$$

Dzięki symetrii gry rezultaty dla Niebieskiego będą takie same. Dlatego gracze winni stosować wszystkie strategie z jednakowymi częstotliwościami 1 : 1 : 1 (ponieważ metoda czasem zawodzi, powinniśmy zawsze sprawdzać otrzymywane rezultaty).

**Przykład 15 — Problem opałowy:** W pewne duszne letnie popołudnie Hans rozmyślał nad problemem zapasu węgla na zimę. Podczas normalnej zimy na ogrzewanie jego domu trzeba ok. 15 t; lecz bywało i tak, że zużywano albo tylko 10 t, albo aż 20 t. Hans przypomniał sobie także, że ceny węgla wahają się w zależności od pogody: 10, 15 i 20 dolarów za tonę zależnie od lekkiej, normalnej czy surowej zimy. Obecnie można kupić węgiel po 10 dolarów za tonę.

Co robić? Czy kupić teraz cały węgiel czy tylko część? Wiosną przeprowadzi się — być może — do Kalifornii i nie będzie mógł zabrać zakupionego węgla. Hans rozpatruje wszystkie długoterminowe prognozy pogody.

Pod uwagę trzeba wziąć trzy czyste strategie, a mianowicie: kupić 10, 15 lub 20 t obecnie, resztę zaś — jeśli będzie trzeba — później. Ceny różnych alternatyw znajdują się w następującej macierzy:



| | | Zima: | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | łagodna | normalna | surowa | Wiersze Min |
| Zapas | 10 | -100 | -175 | -300 | -300 |
| | 15 | -150 | -150 | -250 | -250 |
| | 20 | -200 | -200 | -200 | -200* |
| Kolumny Max | | -100 | -150 | -200* | |

Punkt siodłowy gry odpowiada zapasowi 20 t. (Gdyby Hans miał choć trochę danych odnośnie klimatu, mógłby z tego wyciągnąć korzyść. Powrócimy jeszcze w tym rozdziale do podobnej sytuacji; por. przykład *Umiejętne podejście do chorego*).

**Przykład 16 — Spadkobierca:** George odziedziczył fortunę i powinien zapłacić Wujowi Samowi podatek od spadku w wysokości 100 tys. dolarów. Może jednak spłacać ten podatek w ciągu roku. George postanawia — oczywiście — przesunąć zapłatę na koniec roku, aby wkładając cały kapitał do przedsiębiorstwa osiągnąć jak największy zysk. Zwrócił się z prośbą do firmy Novick and Co., o której możliwościach nie wątpił, aby przedstawili mu odpowiednie dane i cyfry dotyczące tego problemu. Firma przygotowała mu obliczenia o zysku, jaki można osiągnąć inwestując kapitał w różne branże zależnie od politycznej atmosfery, której firma Novick and Co. nie podejmuje się przewidzieć:

| | W przypadku: wojny | zimnej wojny | pokoju |
|---|---|---|---|
| *obligacje* | 2.900 | 3.000 | 3.200 |
| *przemysł zbrojeniowy* | 18.000 | 6.000 | -2.000 |
| *handel* | 2.000 | 7.000 | 12.000 |

George domyślił się, że jest to gra między nim a Naturą. Chce uzyskać maksymalny zysk, zaś Natura stara się, aby osiągnął zysk minimalny.

Gra nie ma ani punktu siodłowego, ani dominowania. Dlatego wypróbujmy zwykły sposób rozwiązania gry 3 × 3; otrzymujemy jednak wynik bezsensowny, tj. częstotliwości, które nie posiadają cech wymaganych od popraw-

nego rozwiązania. Przechodzimy więc do gry 2 × 2 i po pewnych doświadczeniach wypróbowujemy macierz:

| | *wojna* | *zimna wojna* |
|---|---|---|
| *przemysł zbrojeniowy* | 18.000 | 6.000 |
| *handel* | 2.000 | 7.000 |

Daje ona względne częstotliwości 5 : 12 dla strategii George'a (i 1 : 16 dla Natury). To rozwiązanie jest poprawne dla pierwotnej gry:

| | *wojna* | *zimna wojna* | *pokoj* | *Częstotliwości George'a* |
|---|---|---|---|---|
| *obligacje* | 2.900 | 3.000 | 3.200 | 0 |
| *przemysł zbrojeniowy* | 18.000 | 6.000 | −2.000 | 5 |
| *handel* | 2.000 | 7.000 | 12.000 | 12 |
| *Częstotliwości Natury* | 1 | 16 | 0 | |

George może grać zgodnie z odpowiednimi częstotliwościami lub też może włożyć $^5/_{17}$ kapitału wynoszącego 100 tys. dolarów w przemysł zbrojeniowy i $^{12}/_{17}$ w handel. Cena gry wynosi około 6 700 dolarów.

W tym przykładzie, podobnie jak w niektórych poprzednich, zrobiliśmy coś, co może wydać się odstępstwem od naszych własnych reguł: pozwoliliśmy, mianowicie, interpretować względne częstotliwości jako *fizyczną mieszaninę* czystych strategii w jednej partii gry. Inaczej — pozwalamy graczowi zastosować równocześnie trochę z jednej strategii i trochę z drugiej, zamiast nalegać na stosowanie tylko tej strategii, którą mu podpowiada odpowiednie losowanie.

Jest oczywiste, że naruszyliśmy przy tym pewną zasadę; fizyczna mieszanina inaczej nie byłaby możliwa. Każdy możliwy sposób działania powinien być przedstawiony w postaci pewnej czystej strategii; możliwość zastosowania fizycznej mieszaniny nie powinna się w ogóle pojawić.

Ta nienormalna sytuacja powstaje wskutek tego, że istnieje pewna gra nieskończona, która ściśle wiąże się z rozpatrzoną powyżej grą skończoną. W grze nieskończonej gracz może inwestować kapitał na nieskończoną ilość sposobów i kombinacji papierów wartościowych (nie in-

teresujemy się tu praktycznymi ograniczeniami dotyczącymi podzielności papierów wartościowych i pieniędzy). Co więcej, częściowy dochód od każdego rodzaju papierów wartościowych jest proporcjonalny do ich ilości, zaś pełny dochód równy sumie częściowych dochodów. Takie sytuacje można rozpatrywać bądź jako gry nieskończone, które — jak się okazuje — mają punkty siodłowe, bądź też jako gry skończone, które zwykle wymagają zastosowania mieszanych strategii. Rozpatrując te ostatnie jako fizyczną mieszaninę znajdujemy rozwiązanie równoważne punktowi siodłowemu w odpowiedniej grze nieskończonej.

**Przykład 17 — Podział majątku hodowców bydła:** Dalkey i Kaplan mają zamiar zlikwidować swoją fermę zwierzęcą, ponieważ Kaplan czuje się coraz bardziej spychany na dalszy plan. Sprzedali normalnym trybem stado, z wyjątkiem trzech byków-medalistów: Ch. Dallan, Ch. Dalkan i Ch. Dalken.

Powstaje problem: bestie te są bardzo cenne (bez wysiłku można je sprzedać za 20, 30 i 40 tys. dolarów), lecz właściciele nie chcą nawet myśleć o tym, że zwierzęta znajdą się w obcych rękach. Jednocześnie ani jeden, ani drugi nie chce wyłożyć tyle pieniędzy. Każdy uważałby za wygraną posiadanie zwierząt i za przegraną, jeśli przypadłyby partnerowi. Opracowanie zadowalającego ich rozwiązania zabrało nieco czasu .

Porozumieli się wreszcie w sposób następujący: każdy z nich powinien wziąć z talii kart dwójkę, trójkę i czwórkę, które będą symbolizować stawki 20, 30 i 40 tys. dolarów. Następnie postawi się na platformie pierwszego byka, a każdy z partnerów wyciągnie i odkryje jedną z trzech kart. Czyja karta będzie wyższa, ten wygra



byka. Tak samo postąpią z drugim bykiem, przy czym w grze wezmą udział tylko pozostałe karty itd. Byki będzie się wybierać na chybił trafił. W przypadku remisu byka się zabije. Jak powinni grać partnerzy? W jakim porządku powinni otwierać swoje karty? A może lepiej byłoby w jakiś sposób zawierzyć przypadkowi?

Analiza takiej gry jest trochę skomplikowana, dlatego podajemy ją tylko w skrócie. Powinna dotyczyć każdej z trzech gier 3 × 3 w zależności od tego, które zwierzę wybiorą na pierwszy ogień. Każda wypłata gry 3 × 3 jest równa z kolei cenie gry 2 × 2. Załóżmy, że rozpoczęli od starego Dallana, który kosztuje dwie jednostki. Załóżmy też, że obaj partnerzy odkryli dwójki. Biedne zwierzę ginie, lecz żaden z partnerów nie uważa się ani za wygranego, ani za przegranego. Jeśli potem kolej na Dalkana i następnie na Dalkena to istnieją następujące możliwości

| Kaplan gra: | *Dalkey gra:* *3, następnie 4* | *Dalkey gra:* *4, następnie 3* |
|---|---|---|
| *3, następnie 4* | 0+0 | −3+1 |
| *4, następnie 3* | 3−4 | 0+0 |

Ta gra może być przedstawiona w następującej postaci:

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| −1 | 0 |

Istnieje w niej punkt siodłowy w górnym lewym rogu; jej cena równa jest więc zeru (rezultat nie ulegnie zmianie, jeśli dwie ostatnie bestie stawiane będą na wadze w odwrotnej kolejności). To zero dodane do rezultatu pierwszego ruchu, który był także równy zeru, będzie wypłatą w górnym lewym rogu gry 3 × 3, w której Dallan wychodzi pierwszy.

| *Kaplan gra* | *Dalkey gra* 2 | *Dalkey gra* 3 | *Dalkey gra* 4 |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | $-1/7$ | $23/7$ |
| 3 | $1/7$ | 0 | $-1/7$ |
| 4 | $-23/7$ | $1/7$ | 0 |

Pozostałe kartki wypełnia się w podobny sposób. Tak więc, Kaplan i Dalken powinni wybrać swoje pierwsze stawki w ten sposób, aby wygrać tę grę. Wymaga to od nich zastosowania miksu 1 : 23 : 1. Wówczas następne wybory kart kierowane są zasadami gry 2 × 2. Cena całej gry równa jest 0. Gra jest zatem sprawiedliwa.

Jeśli pierwszy wychodził Dalkan, to gra będzie

*Dalkey gra*

| *Kaplan gra* | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | −1 | $5/3$ |
| 3 | 1 | 0 | −1 |
| 4 | $-5/3$ | 1 | 0 |

i wreszcie, jeśli jako pierwszego wyprowadzają Dalkena, to

*Dalkey gra*

| *Kaplan gra* | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | $-13/5$ | $-1/5$ |
| 3 | $13/5$ | 0 | $-13/5$ |
| 4 | $1/5$ | $13/5$ | 0 |

Gry te wymagają odpowiednio strategii 3 : 5 : 3 i 0 : 0 : 1.

Główna wartość tego przykładu polega na tym, że ukazuje, jak skomplikowaną analizę trzeba czasem stosować przy prostym na pierwszy rzut oka zagadnieniu. Wyjąwszy naprawdę proste sytuacje, dla rozwiązania większości potrzeba zręczności i cierpliwości.

**Przykład 18 — Randka:** David i John chcą naznaczyć Ann spotkanie. Obaj młodzi ludzie nie wiedzą dokładnie, kiedy Ann będzie w domu. Jest równie prawdopodobne, że powróci do domu o trzeciej, czwartej lub piątej. Ann woli Davida. Dlatego, jeśli John zadzwoni pierwszy, to poprosi go o parę minut cierpliwości, aby David miał szansę zastać ją w domu. Jeśli zaś David nie odezwie się przez ten czas, to Ann sama zadzwoni do Johna i przyjmie jego zaproszenie. Wieczór, który mają zamiar spędzić, nie będzie zapewne specjalnym szaleństwem, bo chłopcy mają tylko po 10 centów, które połknie automat telefoniczny.

Macierz wypłat można napisać na podstawie elementarnych pojęć teorii prawdopodobieństwa. Na przykład, jeśli David zadzwoni o trzeciej, zaś John o piątej — to dla Davida prawdopodobieństwo spotkania się z Ann równe jest $1/3$, zaś dla Johna $2/3$. Zatem wypłata dla Dawida będzie równa $1/3 - 2/3 = -1/3$. W rezultacie macierz będzie miała postać

| *David dzwoni o godz.:* | *John dzwoni o godz.:* 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 3 | $1/3$ | 0 | $-1/3$ |
| 4 | 0 | $2/3$ | $1/3$ |
| 5 | $1/3$ | $-1/3$ | 1 |

Po bezowocnych poszukiwaniach punktu siodłowego i dominowania przekonujemy się, że jest to gra z trzema aktywnymi strategiami. Stosując standardową metodę (i upraszczając obliczenia przez pomnożenie wszystkiego przez trzy) znajdujemy, że Dawid powinien stosować częstotliwość 2 : 2 : 1, zaś John częstotliwość 10 : 4 : 1. Cena gry jest równa $1/5$ na korzyść Dawida.

Ten dodatni rezultat dla Dawida jest bezspornie wynikiem tego, że Ann mu sprzyja. Aby odpowiedzieć na pytanie, ile spotkań będzie miał David, ile John, a ile wieczorów Ann spędzi samotnie, trzeba się potrudzić. Okazuje się, iż względne częstotliwości sprzyjające tym zdarzeniom będą 97 : 52 : 76. Gdyby powtarzać więc grę 225 razy, to ilość zdarzeń byłaby taka sama, jak odpowiednie częstotliwości; tzn. David miałby 97 spotkań, a John 52. Ann nie miałaby towarzystwa przez 76 wieczorów. Warto zauważyć, że $\frac{97 - 52}{225} = \frac{1}{5}$, co jest chyba zadowalającym sprawdzianem poprawności rozwiązania.

## Podsumowanie metod rozwiązywania gier 3 × 3

W technice rozwiązywania gier 3 × 3 mamy zasadniczo dwa nowe punkty, które nie były potrzebne przy rozwiązywaniu gier 2 × 2. Po pierwsze, eliminowanie strategii

w oparciu o zasadę dominowania i, po drugie — zastosowanie rytuału zakreskowanych komórek macierzy w związku z trzema aktywnymi strategiami. Ogólny porządek rozwiązywania gier 3 × 3 jest następujący:

1. Sprawdzanie gry na punkt siodłowy: inaczej mówiąc, porównanie największej wartości minimów wierszy (maksimin) z najmniejszą wartością maksimów kolumn (minimaks); jeśli są równe, to punkt siodłowy istnieje.

2. Jeśli nie ma punktu siodłowego, próba obniżenia rzędu gry przez zasadę dominowania. Liczby w którymś wierszu mogą okazać się zbyt małe, by zainteresować Niebieskiego lub też wszystkie liczby jednej kolumny mogą być za wysokie dla Czerwonego. Jeśli tak jest, to wykreślamy ów wiersz (lub kolumnę) i szukamy rozwiązania pozostałej gry 2 × 3 lub 3 × 2.

3. Jeśli obie powyższe metody nie dają wyniku, to stosujemy technikę z zakreskowanymi kratkami. Czyli: do rozwiązania wchodzą wszystkie trzy strategie i próbujemy określić optymalne mieszane strategie. Po czym zawsze sprawdzamy otrzymany rezultat!

4. Jeśli wszystkie trzy metody nie powiodły się, zakładamy, że rozwiązanie gry 3 × 3 zgodne jest z rozwiązaniem jednej z gier 2 × 2, która jest w niej zawarta. Sprawdzamy wszystkie te gry, jedną za drugą, aż do chwili, gdy trudy zakończą się powodzeniem lub gdy wszystkie sprawdzimy.

5. Jeśli wszystkie powyższe metody zawiodły to znaczy, że gdzieś popełniono błąd, a to niedobrze! Trzeba uważać, bo poniższe przykłady zawierają różne kruczki.

## Ćwiczenia 3

Określić względne częstotliwości i cenę następujących gier.

Gra 1 (wiersze: Niebieski, kolumny: Czerwony)

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 7 |
| 2 | 1 | 7 | 4 |
| 3 | 4 | 7 | 4 |

Gra 2 (wiersze: Niebieski, kolumny: Czerwony)

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 8 | 9 | 4 |
| 3 | 7 | 6 | 5 |

Gra 3 (wiersze: Niebieski, kolumny: Czerwony)

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 7 | 4 |
| 3 | 1 | 0 | 6 |

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | −10 | 3 |
| 2 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 7 | 11 | −5 |

*4*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 |

*5*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | −1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | −1 |

*6*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 0 |

*7*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 2 |

*8*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 2 |
| 2 | 0 | 6 | 8 |
| 3 | 4 | 1 | 3 |

*9*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 0 | −5 |
| 2 | 0 | 1 | 4 |
| 3 | −5 | 3 | 6 |

*10*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 0 |

*11*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 4 |

*12*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | −6 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 0 |

*13*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 1 |
| 2 | −7 | 2 | 1 |
| 3 | 6 | −5 | −1 |

*14*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | −7 | 4 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |
| 3 | 6 | −5 | −1 |

*15*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 7 |
| 2 | 1 | 7 | 4 |
| 3 | 5 | 7 | 4 |

*16*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 2 |
| 2 | 0 | 7 | 4 |
| 3 | 3 | 8 | 1 |

*17*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 6 |
| 2 | 2 | 2 | 0 |
| 3 | 8 | 0 | 3 |

*18*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 5 |
| 2 | 2 | 4 | 4 |
| 3 | 6 | 1 | 1 |

*19*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 2 |
| 3 | 1 | 5 | 4 |

*20*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 4 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 8 |
| 3 | 1 | 6 | 3 |

*21*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 8 | 0 | 7 |
| 2 | 3 | 3 | 8 |
| 3 | 3 | 6 | 1 |

*22*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 3 | 0 | 7 |
| 2 | 4 | 6 | 0 |
| 3 | 3 | 4 | 3 |

*23*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 203 | 403 | 103 |
| 2 | 303 | 3 | 103 |
| 3 | 3 | 103 | 303 |

*24*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 4 | 6 | 0 |
| 2 | 0 | 3 | 10 |
| 3 | 3 | 6 | 6 |

*25*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 4 | 0 |
| 2 | 1 | 4 | 10 |
| 3 | 5 | 10 | 4 |

*26*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 5 | 5 | 0 |
| 2 | 4 | 7 | 8 |
| 3 | 2 | 2 | 10 |

*27*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 3 | 6 | 0 |
| 2 | 5 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 6 |

*28*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 3 | 5 | 0 |
| 2 | 4 | 4 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 6 |

*29*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 3 | 2 | 4 |
| 2 | 0 | 4 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 4 |

*30*

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 3 | 2 | 4 |
| 2 | 4 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 4 | 3 |

*31*

# Część II: Gry $3 \times m$

## Metoda rozwiązywania

Gry $3 \times m$, w których jeden gracz ma trzy czyste strategie, zaś drugi ma ich wiele, rozwiązujemy za pomocą metod stosowanych przy grach $3 \times 3$, podobnie jak gry $2 \times m$ rozwiązywaliśmy metodami dla gier $2 \times 2$. Każda gra $3 \times m$ posiada zawsze rozwiązanie bądź typu $3 \times 3$, bądź typu gry $2 \times 2$, bądź też punkt siodłowy. Nasze zadanie polega na tym, aby znaleźć odpowiednią grę składową $3 \times 3$ lub $2 \times 2$, rozwiązać ją i pokazać, że znalezione częstotliwości tworzą rozwiązanie pierwotnej gry.

Oczywiście rozpoczynamy od sprawdzenia gry na punkt siodłowy i na dominowanie, aby wyłączyć z analizy nie-

potrzebne wiersze lub kolumny. Jeśli uda się wyłączyć w ten sposób jedną ze strategii gracza mającego tylko trzy strategie, to zadanie sprowadza się od razu do znalezienia rozwiązania typu $2 \times 2$ dla gry $2 \times m$.

Jeśli gra $3 \times m$ nie posiada punktu siodłowego i wyłączenie strategii na podstawie zasady dominowania nie dało istotnego uproszczenia, wówczas trzeba popracować nad zadaniem dłużej. Musimy przejrzeć wszelkie możliwości gry $3 \times 3$ i $2 \times 2$, dopóki nie znajdziemy takiej gry, której rozwiązanie mogłoby być jednocześnie rozwiązaniem pierwotnej gry $3 \times m$.

Ponieważ umiemy już posługiwać się graficznym sposobem wyszukiwania aktywnych strategii gier $2 \times 2$ zawartych w grze $2 \times m$, to i teraz zastosujemy tę metodę. Będziemy szukali rozwiązania typu $2 \times 2$ gry $3 \times m$ rozbijając ją na gry typu $2 \times m$. Sprawdzimy Niebieski 1 i 2 przeciw wszystkim Czerwonym $m$; następnie Niebieski 2 i 3 przeciw wszystkim Czerwonym $m$ i wreszcie Niebieski 3 i 1.

Jeśli istnieje gra typu $2 \times 2$, której rozwiązanie spełnia pierwotną grę, szybko znajdziemy ją za pomocą metody graficznej. Ponieważ jest to zadanie proste, powinniśmy wypróbować je, zanim przystąpimy do poszukiwania rozwiązania typu $3 \times 3$.

Aby oswoić się z macierzami gier $3 \times m$, trzeba przerobić parę przykładów. Oto odpowiedni przykład:

| | *Czerwony* 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | *Wiersze Min* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* 1 | 6 | 0 | 2 | 0 | 7 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 2 | −5 | 4 | 8 | −3 | 1 | −5 |
| 3 | 1 | 3 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 6 | 1* |
| *Kolumny Max* | 6 | 3 | 5 | 1* | 7 | 8 | 4 | 6 | |

Zwykła rutynowana procedura poszukiwania minimów wierszy i maksimów kolumn, a następnie odnalezienie największego minimum i najmniejszego maksimum, prowadzi do nieoczekiwanego finału: to straszydło ma punkt siodłowy! Optymalne strategie to Niebieski 3 przeciwko Czerwony 4. Cena gry równa jest 1 na korzyść Niebieskiego.

Wiemy już dostatecznie dużo, by nie oczekiwać podobnego szczęśliwego rozwiązania w następnym przykładzie:

| | Czerwony 1 | Czerwony 2 | Czerwony 3 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|
| Niebieski 1 | −7 | −11 | −7 | −11 |
| Niebieski 2 | −7 | −90 | −7 | −90 |
| Niebieski 3 | −9 | −10 | −9 | −10* |
| Niebieski 4 | −7 | −12 | −7 | −12 |
| Kolumny Max | −7 | −10* | −7 | |

Lecz punkt siodłowy znowu istnieje i dowodzi, że nie wolno nikomu wierzyć i zawsze trzeba sprawdzać, czy gra ma punkt siodłowy.

A teraz inna gra:

| | Czerwony 1 | Czerwony 2 | Czerwony 3 | Czerwony 4 | Czerwony 5 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Niebieski 1 | 3 | 5 | −2 | 2 | 1 | −2 |
| Niebieski 2 | 3 | 6 | −1 | 2 | 4 | −1 |
| Niebieski 3 | 4 | 3 | 6 | 7 | 8 | 3* |
| Kolumny Max | 4* | 6 | 6 | 7 | 8 | |

Tu wreszcie nie ma punktu siodłowego, lecz na pierwszy rzut oka widać, że Niebieski 2 jest lepsza nż Niebieski 1. To daje nam:

| | Czerwony 1 | Czerwony 2 | Czerwony 3 | Czerwony 4 | Czerwony 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Niebieski 2 | 3 | 6 | −1 | 2 | 4 |
| Niebieski 3 | 4 | 3 | 6 | 7 | 8 |

W tej macierzy Czerwony 3 jest lepsza niż Czerwony 4 i 5, tak że w rezultacie otrzymujemy macierz:

| | Czerwony 1 | Czerwony 2 | Czerwony 3 |
|---|---|---|---|
| Niebieski 2 | 3 | 6 | −1 |
| Niebieski 3 | 4 | 3 | 6 |

nad którą musimy teraz popracować. Ta gra zawiera następujące trzy gry typu 2×2: Czerwony 1 i 2; Czerwony 2 i 3; Czerwony 3 i 1. Rozwiązanie jednej z nich powinno

dać rozwiązanie wyjściowej gry. Łatwo sprawdzić wszystkie, lecz pierwsza z nich, a mianowicie

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 | 1 |
| 3 | 4 | 3 | 3 |
| Częstotliwości Czerw. | 3 | 1 | |

przynosi — na szczęście — rozwiązanie pierwotnej gry. Tak więc, ogólne rozwiązanie będzie 0 : 1 : 3 dla Niebieskiego i 3 : 1 : 0 : 0 : 0 dla Czerwonego.

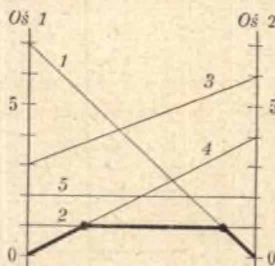
Rozpatrzmy jeszcze jedną grę:

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 0 | 5 | 5 |

Tu nie pomoże nam ani punkt siodłowy, ani dominowanie. Spróbujmy zatem znaleźć rozwiązanie typu 2 × 2. Pierwsza gra 2 × 5

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 6 | 4 | 2 |

da się przedstawić w postaci wykresu




Jasne, że jest to przypadek trochę patologiczny, ponieważ na wykresie istnieje pozioma linia, przedstawiająca

Czerwony 2. Reguła zastosowania wykresu dla rozwiązania gry nakazuje zwrócić uwagę na najwyższy punkt dolnej granicy. W naszym przypadku dwa punkty przecięcia Czerwony 2, 4 i Czerwony 1, 2 wiodą o to spór. Gry 2 × 2 oparte na strategiach Czerwony 2, 4 i Czerwony 1, 2 posiadają punkty siodłowe, lecz gra 2 × 5 nie posiada punktu siodłowego. Stąd wniosek: te punkty siodłowe nie mogą być rozwiązaniem gry 2 × 5. Gry 2 × 2 mają jednak równocześnie punkty siodłowe i mieszane strategie. Oto one:

| Niebieski \ Czerwony | 2 | 4 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 3 |
| 2 | 1 | 4 | 1 |
| Częstotliwości Czerw. | 4 | 0 | |

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 6 |
| Częstotliwości Czerw. | 0 | 7 | |

Częstotliwości stosowania w tych grach Czerwony 1 i Czerwony 4 okazują się równe dokładnie zeru. Oznacza to, że Niebieski powinien stosować mieszaninę 3 : 1 (lub 1 : 6), podczas gdy Czerwony powinien stosować swoją strategię 2; może on także „grać" Czerwony 1 lub Czerwony 4, lecz z zerową częstotliwością! Taka odpowiedź może wprawić w zakłopotanie. Powrócimy do tego jeszcze później (o wiele później), a na razie nie traćmy czasu, ponieważ żadne z rozwiązań tej gry 2 × 5 nie rozwiązuje gry 3 × 5.

Spróbujmy szczęścia z drugą grą 2 × 5.

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 0 | 5 | 5 |

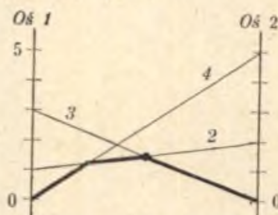
Czerwony 2, 4 i 5 dominują, w rezultacie czego pozostaje gra

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 6 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 6 |
| Częstotliwości Czerw. | 6 | 1 | |

której rozwiązanie zawodzi w wyjściowej grze 2 × 5. Wypróbujmy wreszcie ostatnią grę 2 × 5.

| | | Czerwony | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Niebieski | 1 | 7 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| | 3 | 1 | 2 | 0 | 5 | 5 |

Czerwony 1 i 5 dominują, dlatego wolno nam wnieść na wykres tylko Czerwony 2, 3 i 4:




Z wykresu jasno wynika, że chcemy rozpatrywać tylko grę 2 × 2, opartą na Czerwony 2 i 3.

| | | Czerwony | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | Częstotliwości Nieb. |
| Niebieski | 1 | 1 | 3 | 2 |
| | 3 | 2 | 0 | 2 |
| Częstotliwości Czerw. | | 3 | 1 | |

Jest to, chwała Bogu, rozwiązanie gry 2 × 5, lecz nie nadaje się, niestety, do wyjściowej gry 3 × 5.

Trudno znieść tyle niepowodzeń — ciągle nic nie wiemy o rozwiązaniu gry 3 × 5, oprócz tego że nie posiada ani punktu siodłowego, ani rozwiązania typu 2 × 2. Jedyna korzyść polega na tym, że wiemy teraz, iż gra ma rozwiązanie typu 3 × 3.

A więc z powrotem do czarnej roboty! Spróbujemy grę

| | | Czerwony | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | Wiersze Min |
| Niebieski | 1 | 7 | 1 | 3 | 1* |
| | 2 | 0 | 1 | 6 | 0 |
| | 3 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| Kolumny Max | | 7 | 2* | 6 | |

Punktu siodłowego nie ma. Dominowania nie ma. Dlatego określimy względne częstotliwości strategii Czerwonego z macierzy:

*Czerwony*

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 7 | 0 | −3 |
| −1 | −1 | 6 |

Częstotliwość zastosowania Czerwony 1, wynosi

| | |
|---|---|
| 0 | −3 |
| −1 | 6 |

$= 0 \times 6 - (-3) \times (-1) = -3$

a więc 3 to nasza liczba. Pozostałe częstotliwości strategii Niebieskiego i Czerwonego znajdujemy w podobny sposób. Dla Niebieskiego wynoszą 7 : 10 : 32, zaś dla Czerwonego 3 : 39 : 7. To właśnie jest rozwiązanie pierwotnej gry 3 × 5 i praca jest skończona. Nie trzeba rozwiązywać już pozostałych dziewięciu gier typu 3 × 3, zawartych w pierwotnej macierzy

| *Niebieski* \ *Czerwony* | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | *Częstotliwości Nieb.* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 1 | 3 | 0 | 2 | 7 |
| 2 | 0 | 1 | 6 | 1 | 2 | 10 |
| 3 | 1 | 2 | 0 | 5 | 5 | 32 |
| *Częstotliwości Czerw.* | 3 | 39 | 7 | 0 | 0 | |

**Przykład 19 — Okoń i Profesor:** Bohaterem tej historii jest wspaniały młody centrarchoid (*Micropterus*), którego ludzie bez fantazji opisują jako „rybę jadalną podobną do okonia". Czarnym charakterem jest Wędkarz Kleene; nazywać ich będziemy po prostu — Okoń i Profesor. Wraz z kilkoma owadami i wodą tworzą grupę biologiczną.

Owady (szerszenie, ważki i trzmiele) są także wysoko cenione przez smakoszy. Nie znajdują się na powierzchni stawu w równej ilości; jeśli profesor doda jednego owada (razem z haczykiem) do każdego z rodzajów owadów, zaś okoń złakomi się właśnie na ten rodzaj, to prawdopodobieństwa śmiertelności mają się do siebie jak 2 : 6 : 30.

Znaczy to, że w powietrzu jest 5 razy więcej ważek niż trzmieli, zaś szerszeni 3 razy więcej niż ważek[17]. Czym powinien karmić się okoń i jaką przynętę powinien stosować profesor? Oto macierz wypłat tej gry:

| Okoń żywi się: | Profesor łowi na: szerszenia | ważkę | trzmiela |
|---|---|---|---|
| szerszeniem | -2 | 0 | 0 |
| ważką | 0 | -6 | 0 |
| trzmielem | 0 | 0 | -30 |

Nie ma ani punktu siodłowego, ani dominowania. Napiszemy zakreskowaną macierz dla okonia:

| | | |
|---|---|---|
| szerszeń | −2 | 0 |
| ważka | 6 | −6 |
| trzmiel | 0 | 30 |

tak więc, będzie się on żywił szerszeniami z częstotliwością

| | | | |
|---|---|---|---|
| szerszeń | | | |
| | 6 | −6 | =180 |
| | 0 | 30 | |

ważkami z częstotliwością

| | | | |
|---|---|---|---|
| | −2 | 0 | |
| ważka | | | =60 |
| | 0 | 30 | |

zaś trzmielami z częstotliwością

| | | | |
|---|---|---|---|
| | −2 | 0 | |
| | 6 | −6 | =12 |
| trzmiel | | | |



lub po uproszczeniu przez 12 jego mieszana strategia powinna być 15 : 5 : 1. Możemy sprawdzić, że profesor stosuje tę samą strategię. Cena gry jest ujemna dla okonia, a mianowicie: $-{}^{10}/_{7}$.

Ale wędkarze są wielkimi eksperymentatorami; zawsze chętnie kupują, a czasami nawet stosują nową przynętę, pod warunkiem, że nie jest to robak. Profesor zamówił sobie nowe cacko, które łatwo można było pomylić z każdym z trzech owadów; równocześnie jednak jest ono dla ryby podwójnie podejrzane i to zmniejsza jego efektywność. Dodanie nowej przynęty zmienia grę:

| | | *Profesor* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *szerszeń* | *ważka* | *trzmiel* | |
| *Okoń* | *szerszeń* | −2 | 0 | 0 | −1 |
| | *ważka* | 0 | −6 | 0 | −3 |
| | *trzmiel* | 0 | 0 | −30 | −15 |

Okoń powinien teraz stosować strategię 3 : 1 : 0, co niewiele różni się od uprzedniej strategii: trzmiele stały się pożywieniem zbyt niebezpiecznym. Profesor musi stosować strategię 7 : 2 : 0 : 1 i nie powinien w ogóle nakładać na haczyk trzmieli. Jego nowa przynęta stosowana jest tylko w 10%. Cena gry równa jest teraz $-{}^{30}/_{20}$, co oznacza nieznaczną poprawę dla profesora w porównaniu z $-{}^{30}/_{21}$, — ceną poprzedniej gry. Potwierdza się stara prawda: łowienie ryb jest kosztowne.

**Przykład 20 — Umiejętne podejście do chorego:** Pacjent cierpi na pewną dobrze znaną chorobę: jest tak dobrze znana, że znamy jej pięć wariantów wywoływanych pięcioma szczepami bakterii. Doktór Wendel ma trudności w postawieniu diagnozy na podstawie samych tylko oględzin.

Doktór ponownie bada choremu tętno. Zaufanie pacjenta rośnie o jeden stopień, ponieważ to powtórne sprawdzanie pulsu jest świadectwem uwagi i troski lekarza. Jeśli jednak pacjent znałby przyczynę powtórnego sprawdzania pulsu, sztuczka nie udałaby się i jego zaufanie załamałoby się gwałtownie. Doktór szukał pretekstu, by popatrzeć na wskazówkę sekundnika, ponieważ potrzebował po prostu jakiejś przypadkowej liczby. Oto przykład, jak zwodnicze bywają podstawy zaufania, chociaż lekarz w istocie był dokładny i zasługiwał na pełne zaufanie. Nie miał jednak czasu, by nauczyć pacjenta jednocześnie i medycyny, i teorii gier.



Doktór ma trzy lekarstwa. Zastosowanie pierwszego z nich gwarantuje w 50% zwycięstwo nad czterema szczepami bakterii. Drugie lekarstwo zabija tylko jeden z tych czterech. Trzecie gwarantuje w 50% śmierć innego z nich, lecz daje za to pełną gwarancję przeciw piątemu.

Macierz wypłat wygląda tak:

| Lekarstwo \ Szczep | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 1 |

Z punktu widzenia Natury szczepy 1 i 2 dominują nad szczepami 3 i 4, te ostatnie zaś są zupełnie równorzędne z punktu widzenia walki z baterią lekarstw. Tak więc, nasza gra sprowadza się do następującej:

| Lekarstwo \ Szczep | 4 | 5 |
|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 |

Lekarz nie musi być geniuszem, by wiedzieć, że w tej skróconej grze, lekarstwo 2 jest gorsze od obu pozostałych. Dlatego macierz będzie miała postać:

| Lekarstwo \ Szczep | 4 | 5 | Częstotliwości lekarza |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1/2 |
| Częstotliwości Natury | 1 | 1/2 | |

Względne częstotliwości wynoszą 1 : 1/2, czyli 2 : 1 na korzyść lekarstwa 1. Dlatego mieszana strategia lekarza powinna wynieść 2 : 0 : 1. Cena gry równa jest 1/3, zaś kaprysy Natury nie mogą zmniejszyć ceny gry poniżej tej średniej wartości.

Tutaj wypada zrobić małą dygresję i pokazać, jak zmienia się sytuacja, jeśli lekarz zna trochę strategię Natury. Ponieważ w istocie nie jest Ona mściwa, więc nie ukarze go za wykorzystanie tej wiedzy.

Załóżmy, że doświadczenie uczy, że Natura miesza szczepy bakteryjne odpowiednio do względnych częstotliwości 1 : 3 : 3 : 2 : 5. Teraz lekarz może obliczyć średni zysk z zastosowania każdej ze swych strategii. Na przykład, jeśli stosuje się stale lekarstwo Niebieski 1, to jego średnia wygrana będzie równa (zgodnie z wyjściową macierzą):

$$\frac{1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+5\times 0}{1+3+3+2+5}=\frac{\frac{9}{2}}{14}=\frac{9}{28}$$

Przy zastosowaniu lekarstwa Niebieski 2, jego średnia wygrana wyniesie:

$$\frac{1\times 1+3\times 0+3\times 0+2\times 0+5\times 0}{14}=\frac{1}{14}\left(=\frac{2}{28}\right)$$

Przy zastosowaniu lekarstwa Niebieskiego 3 będzie równa 13/28. Dlatego gra ma teraz następującą formę:

| Lekarz | Natura |
|---|---|
| 1 | 9/28 |
| 2 | 2/28 |
| 3 | 13/28 |

Jest jasne, że lekarz będzie stosował lekarstwo Niebieski 3. Cena tej gry równa jest $^{13}/_{28}$, to jest więcej niż $^{1}/_{3}$ (cena wyjściowej gry). Dodatkowa informacja, którą posiada teraz doktór, przynosi mu określoną korzyść. Jest to prawda ogólna, szczególnie istotna w grach przeciw Naturze. Im więcej o niej wiemy, tym skuteczniej możemy grać przeciwko niej.

Te rozważania można by z korzyścią posunąć o krok dalej: jeśli Natura stosuje istotnie mieszaną strategię 1 : 3 : 3 : 2 : 5 — jak to założyliśmy — zaś doktór przez swoją niewiedzę stosuje — tak jak i uprzednio — strategię 2 : 0 : 1, która wynikała z teorii gier, wygra on jednak więcej niż $^{1}/_{3}$, to znaczy więcej niż wynosi cena pierwotnej gry. Bowiem Natura nie stosuje najlepszej ze swoich strategii. Widzieliśmy, że jej strategia 1 : 3 : 3 : 2 : 5 prowadzi do gry w postaci

| | | Natura |
|---|---|---|
| Lekarz | 1 | $^{9}/_{28}$ |
| | 2 | $^{2}/_{28}$ |
| | 3 | $^{13}/_{28}$ |

Jeśli doktór stosuje miks 2 : 0 : 1 w zgodzie z wnioskami z analizy pierwotnej, to jego średnia wygrana będzie równa

$$\frac{2\times\frac{9}{28}+0\times\frac{2}{28}+1\times\frac{13}{28}}{2+0+1}=\frac{31}{84}$$

Można zatem wyprowadzić następujący wniosek: jeśli gra przebiega tak, jak wyobraża ją sobie doktór, a Natura zachowuje się w najbardziej niebezpieczny sposób, to lekarz wygrywa $^{1}/_{3}$ = 0,333. Jeśli natura stosuje strategię 1 : 3 : 3 : 2 : 5, wygrywa on 31/84 = 0,369. Jeśli zaś lekarz zna strategię Natury, to może przejść od strategii 2 : 0 : 1 do strategii 0 : 0 : 1 i wygrać $^{13}/_{28}$ = 0,464. Tak więc jego dodatkowe wiadomości mają wartość około 26%.

W życiu zdarzają się chyba takie sytuacje, w których częściowa informacja i zastosowanie techniki teorii gier mogą dać dobre rezultaty, nawet jeśli gracz nie zna dokładnej wartości ceny gry.



**Przykład 21 — Szachiści:** Dwie drużyny, każda z trzech osób, zebrały się, aby rozegrać po dwie partie szachów. To zdarzenie znane jest jako mecz Barankina, Bodenhorna i Browna przeciw Bellmanowi, Brownowi i Brownowi. Przykro nam, że tu tak dużo Brownów, lecz takie jest życie. Jednakże indentyfikacja jest prosta, co stanie się zaraz jasne dla wszystkich umiejących rozwiązywać zagadki.

Brown może pokonać Barankina, Barankin Bellmana, zaś Bellman może pobić Bodenhorna. Pozostali gracze są równi. W ostatniej chwili Brown zachorował. Cała ta informacja może być sprowadzona do następującej tablicy:

| | Ba | Bo | Br |
|---|---|---|---|
| Be | −1 | 1 | 0 |
| Br | 1 | 0 | 0 |

Każda drużyna powinna wybrać dwóch graczy i porządek, w którym powinni grać. Aby w jakiś sposób skompensować chorobę Browna, postanowiono, że kapitan drużyny Brown może, jeśli zechce, grać obie gry za swój zdekompletowany zespół.

W takim przypadku istnieją następujące możliwości (jeśli literami BaBo oznaczyć, że Barankin gra pierwszą partię, zaś Bodenhorn — drugą itd.):

| | (1) BaBo | (2) BaBr | (3) BoBa | (4) BoBr | (5) BrBa | (6) BrBo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BeBr | -1 | -1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| BrBe | 2 | 1 | -1 | 0 | -1 | 1 |
| BrBr | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

W grze nie ma punktu siodłowego, lecz strategia (1) dominuje nad strategią (2), zaś strategia (3) dominuje nad strategią (5). Dlatego gra otrzymuje uproszczoną postać:

| (2) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|
| -1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | -1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |

Wystarczy stosunkowo niewielki wysiłek, by znaleźć rozwiązania: zdekompletowana drużyna powinna stosować swoje strategie ze względnymi częstotliwościami 1 : 1 : 1. Druga drużyna ma do dyspozycji dwa podstawowe rozwiązania: 0 : 1 : 0 : 2 : 0 : 0 lub 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 2.

## Podsumowanie metod rozwiązywania gier 3 × *m*

Metody rozwiązywania gier 3 × *m* różnią się niewiele od metod rozwiązywania gier 3 × 3. Rozpoczynamy, jak zwykle, od poszukiwania punktu siodłowego i — jeśli nie udaje się go znaleźć — próbujemy wyłączyć niektóre wiersze i kolumny stosując zasadę dominowania. Jeśli również to nie doprowadza gry do takiej postaci, z którą można by coś zrobić, np. do gier typu 2 × 2, 2 × *m*, lub 3 × 3 — wówczas wybieramy jedną z dwóch dróg:

1) jakąkolwiek grę 3 × 3 wchodzącą w grę wyjściową rozwiązujemy i podstawiamy jej rozwiązanie w wyjściową grę 3 × *m*. Powtarzamy tę operację, dopóki nie osiągniemy powodzenia.

2) rozbijamy grę na trzy gry 2 × *m* oparte na strategiach Niebieski 1 i 2, Niebieski 1 i 3 oraz Niebieski 2 i 3 i za pomocą metody graficznej szukamy takiej gry typu 2 × 2, której rozwiązanie spełnia grę 2 × *m* i — miejmy

nadzieję — także wyjściową grę $3 \times m$. Jeśli te próby nie zakończą się powodzeniem, oznacza to, że nie ma rozwiązania typu $2 \times 2$ i powinniśmy zastosować pierwszy sposób postępowania.

## Ćwiczenia 4

Określcie względne częstotliwości i ceny następujących gier:

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 3 | 4 |
| 2 | 5 | 6 | 4 | 5 |
| 3 | 7 | 2 | 0 | 3 |

*1*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 10 | 11 | 12 | 4 |
| 3 | 9 | 8 | 7 | 6 |

*2*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 2 | 5 |
| 2 | 5 | 1 | 6 | 2 |
| 3 | 2 | 5 | 1 | 6 |

*3*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 3 | 1 |

*4*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 |

*5*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | 1 | 3 |

*6*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 0 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 3 | 4 | 8 |
| 3 | 3 | 6 | 3 | 1 |

*7*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 0 | 2 |
| 2 | 6 | 1 | 3 | 0 |
| 3 | 2 | 5 | 3 | 6 |

*8*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 5 | 3 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 4 |

*9*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 6 |
| 2 | 6 | 0 | 4 | 2 | 6 | 2 |
| 3 | 0 | 7 | 3 | 6 | 2 | 2 |

*10*

**11**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 2 | −4 |
| 2 | 4 | 1 | −2 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | −4 | −1 | 2 |
| 5 | −8 | −2 | 4 |

**12**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −17 | −34 |
| 2 | −2 | −15 | −35 |
| 3 | −20 | −22 | −24 |
| 4 | −3 | −15 | −35 |
| 5 | −40 | −27 | −14 |
| 6 | −5 | −21 | −30 |

**13**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | −1 | 0 |
| 4 | 5 | −4 | −2 |
| 5 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 25 | −13 | −12 |

**14**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 1 |
| 2 | −6 | 2 | 0 |
| 3 | 5 | 4 | 3 |
| 4 | −7 | 3 | 6 |

**15**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 5 | 9 |
| 3 | 2 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 5 | 8 |

# 4

# Gry z czterema i więcej strategiami

Rozwiązywanie gier z czterema i więcej strategiami może uchodzić za zajęcie niezbyt przyjemne, chyba że miłość do arytmetyki jest przypadkiem klinicznym. Jednakże same układy gier kompensują w pewnym stopniu przykrość — są bowiem bardzo interesujące. Po rozwiązaniu dużej gry, samopoczucie poprawia się wybitnie.

## Rozwiązanie poprzez Odkrycie

Najlepszym sposobem rozwiązania dużej gry jest *Odkrycie* tego rozwiązania. Jeśli możemy domyśleć się go na podstawie struktury zadania lub jeśli otrzymaliśmy jakąś obiecującą sugestię z dowolnego źródła, sprawdzamy ją. Obliczamy po prostu średnią zapłatę, gdy np. Niebieski stosuje swój miks, o którym przypuszcza, że jest poprawny, kolejno przeciw każdej czystej strategii Czerwonego. Jeśli domysł jest prawdziwy, to po pierwsze — wszystkie wypłaty powinny być równe, z wyjątkiem prawdopodobnie większych wypłat, które może otrzymać Niebieski grając przeciwko czystym strategiom Czerwonego, nie wchodzącym w skład jego optymalnej strategii mieszanej. Po drugie zaś, ta sama średnia wypłata powinna pojawić się znowu wówczas, gdy Czerwony sto-

suje swój optymalny miks przeciw czystej strategii Niebieskiego; wypłata ta może być jednak mniejsza (a więc korzystna dla Czerwonego) przy grze przeciw strategii Niebieskiego, nie wchodzącej w optymalną mieszaną strategię Niebieskiego.

Przytoczony poniżej przykład pokaże, jak wszystko to jest prostsze do opisania niż do wykonania.

Rozpatrzmy następującą grę 5 × 5:

| | | *Czerwony* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *Niebieski* | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | 3 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| | 4 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| | 5 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 |

Jeśli jesteś siódmym synem siódmego syna, masz kryształową kulę niezwykłej czystości i masz dużo szczęścia — to może cię nawiedzić myśl, że Czerwony powinien mieszać strategie zgodnie z względnymi częstotliwościami 4 : 35 : 6 : 57 : 40 (to jest bardzo złożony układ liczb, daleko poza skromnymi granicami, które przyrzekaliśmy powyżej; ale przykład ten podkreśla, że możemy — i powinniśmy — sprawdzać każde rozwiązanie — nawet tylko prawdopodobne — i cieszyć się, gdy jest ono dobre. I gdy nie jest).

Użyteczność tych liczb dla rozwiązania może być udowodniona w ten sposób: załóżmy, że są one prawdziwe i obliczmy cenę gry. Dla wygody przepiszmy macierz w następującej postaci:

| 4 | 35 | 6 | 57 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 0 |

Teraz, rozpatrując kolejno każdy wiersz, pomnóżmy względne częstotliwości przez odpowiednie wypłaty, do-




dajmy wszystkie te iloczyny razem i otrzymaną sumę podzielmy przez sumę względnych częstotliwości. W rezultacie przy grze przeciw Niebieski 1 (pierwszy wiersz) średnia wypłata wyniesie:

$$\frac{4\times0+35\times1+6\times0+57\times2+40\times0}{4+35+6+57+40}=\frac{149}{142}$$

Przeciw Niebieski 2 jest równa (opuściliśmy mnożenie przez zero)

$$\frac{4\times3+57\times1+40\times2}{142}=\frac{149}{142}$$

Przeciw Niebieski 3

$$\frac{6\times2+57\times1+40\times2}{142}=\frac{149}{142}$$

Przeciw Niebieski 4

$$\frac{4\times1+35\times3+40\times1}{142}=\frac{149}{142}$$

Przeciw Niebieski 5

$$\frac{4\times1+35\times2+6\times3+59\times1}{142}=\frac{149}{142}$$

Teraz jest oczywiste, że źródło naszej informacji o mieszanej strategii Czerwonego, jest godne zaufania ponieważ stałość rezultatu przy jej stosowaniu przez Czerwonego — strata $^{149}/_{142}$ jednostek wypłaty — wygląda na niepozbawioną sensu. Jednak nie dowiedliśmy jeszcze, że te względne częstotliwości są najlepsze; może się okazać, iż optymalna mieszana strategia Niebieskiego zapewni mu wygraną co najmniej $^{148}/_{142}$ zamiast $^{149}/_{142}$. Dlatego należy znaleźć także względne częstotliwości dla Niebieskiego. Jeżeli zdobyliśmy powyższy zbiór wartości częstotliwości dla Czerwonego, to możemy założyć, że bez specjalnego trudu uda się nam oznaczyć częstotliwości dla Niebieskiego jako 28 : 33 : 31 : 21 : 29. Następnie sprawdzamy, że wypłata Niebieskiego wynosi $^{149}/_{142}$.

Każde rozwiązanie gry musi być sprawdzone w ten właśnie sposób. Jest to jedyna obrona przeciwko kaprysom arytmetyki i innym słabościom człowieka lub metody.

## Punkty siodłowe

Jeśli w dużej grze jest jeden lub więcej punktów siodłowych, znalezienie rozwiązania jest łatwe. Rozpatrzmy przykład:

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 | *Wiersze Min* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 5 | 6 | 5 | 5* |
| 2 | 1 | 4 | 2 | −1 | −1 |
| 3 | 8 | 5 | 7 | 5 | 5* |
| 4 | 0 | 2 | 6 | 2 | 0 |
| *Kolumny Max* | 8 | 5* | 7 | 5* | |

Największe minimum wierszy równe jest 5 i najmniejsze maksimum kolumn też 5. Znaczy to, że punkt siodłowy istnieje. W danym wypadku istnieją nawet cztery takie punkty (przypominamy: jeśli istnieje parę punktów siodłowych, to wszystkie mają tę samą wartość). Niebieski może stosować czystą strategię Niebieski 1 lub Niebieski 3, Czerwony może stosować odpowiednio strategię Czerwony 2 i Czerwony 4. Może — jeśli chce — mieszać obie strategie w dowolny sposób. Cena gry równa jest 5.

## Dominowanie

Podobnie jak w małych grach, korzystne jest zawsze sprawdzenie, czy istnieją dominujące kolumny i podporządkowane wiersze. Jeśli tak, mogą być wykreślone z macierzy gry lub też można im przypisać zerowe częstotliwości względne. Na przykład, poniższa macierz jest w istocie macierzą gry 3 × 3. Wiersze lub kolumny nie oznaczone gwiazdką, są dla graczy mniej dogodne niż wiersze i kolumny oznaczone gwiazdką

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 2 | 3 | 6 | |
| 2 | 7 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | † |
| 3 | 4 | 6 | 8 | 3 | 4 | 7 | † |
| 4 | 5 | 0 | 3 | 4 | 4 | 2 | |
| 5 | 7 | 2 | 2 | 3 | 5 | 3 | |
| 6 | 6 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | † |
| | | † | | † | † | | |

Na tym przykładzie widać, że poszukiwanie dominujących strategii w dużej macierzy, chociaż proste w zasadzie, jest obrzydliwym zajęciem.

## Wszystkie — Strategie — Aktywne

Podobnie, jak w przypadku gier 3 × 3, po sprawdzeniu, czy istnieją punkty siodłowe i dominowania, zakła-

damy na próbę, że wszystkie strategie występują w optymalnej mieszanej strategii i staramy się znaleźć ich względne częstotliwości. Aby to zrobić, musimy dołączyć jeszcze jeden kruczek do techniki rozwiązywania gier typu 3 × 3. Najlepiej zilustruje to przykład gry 4 × 4:

*Czerwony*

| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* | 1 | 1 | 7 | 0 | 3 |
| | 2 | 0 | 0 | 3 | 5 |
| | 3 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| | 4 | 6 | 0 | 2 | 0 |

Później stanie się jasne, że ten sposób może być stosowany w grach z dowolną liczbą strategii.

Jak zwykle, rozpoczniemy od rozwiązywania zadania dla Czerwonego. Przede wszystkim odejmiemy od każdej wypłaty wypłatę umieszczoną poniżej, dokładnie tak samo, jak to robiliśmy przy rozwiązywaniu gier 2 × 2 i 3 × 3. Daje to nam:

*Czerwony*

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | −3 | −2 |
| −1 | −2 | −1 | 4 |
| −5 | 2 | 2 | 1 |

Względne częstotliwości dla każdej czystej strategii zależą od tego, co pozostanie po wykreśleniu z zakreskowanej macierzy kolumny przedstawiającej tę czystą strategię. Tak więc, względne częstotliwości np. dla strategii Czerwony 1 określa się za pomocą następujących liczb:

| 1 | | | |
|---|---|---|---|
| . | 7 | −3 | −2 |
| | −2 | −1 | 4 |
| | 2 | 2 | 1 |

Określanie względnych częstotliwości z tych zakreskowanych macierzy jest w zasadzie proste nawet dla złożonych gier, tak proste jak liczenie po jednym aż do miliona. Na każdym etapie rozwiązywania wiemy bardzo

dokładnie, co będziemy robili dalej. Znacznie łatwiej wszystko to robić niż wyjaśniać. Niestety, musimy wyjaśnić.

Dla określenia względnych częstotliwości mieszczących się w jakiejkolwiek zakreskowanej macierzy, powinniśmy zastąpić zerami niektóre liczby w macierzy. W szczególności powinniśmy *zastąpić wszystkie liczby* (*oprócz jednej*) *z jakiegoś wiersza* (*lub z jakiejś kolumny*) *zerami*, stosując oczywiście jakiś uczciwy sposób. Możemy np. przekształcić macierz 3 × 3

| | | |
|---|---|---|
| 7 | −3 | −2 |
| −2 | −1 | 4 |
| 2 | 2 | 1 |

w macierz taką:

| | | |
|---|---|---|
| * | | |
| 0 | | |
| 0 | | |

albo taką:

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| 0 | * | 0 |
| | | |

gdzie zakreskowane kratki zawierają odpowiednie liczby, zwykle różne od wyjściowych. Kratka oznaczona gwiazdką pokazuje ten element wiersza lub kolumny, którego nie zastępujemy zerem. Te uwagi odnoszą się także i do dużych macierzy. Jeśli więc napotkamy macierz typu:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

będzie zabawnie przekształcić ją w macierz

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| 0 | * | 0 | 0 |
| | | | |

Skąd to zainteresowanie i zabawa z zerami? Oczywiście, czysto użyteczne: *skoro doszliśmy do macierzy tego typu, możemy już pomijać wszystkie kratki leżące na wschód, na zachód, na północ i na południe od kratki z gwiazdką.* Zaś ona sama może być zabrana z macierzy jako mnożnik. Dzięki temu macierz

| | | |
|---|---|---|
| * | | |
| 0 | | |
| 0 | | |

jest równoważna macierzy

| | | |
|---|---|---|
| * | | |
| | | |
| | | |

która jest z kolei równoważna wyrażeniu

| * |
|---|

×

| | |
|---|---|
| | |
| | |

Podobnie

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| 0 | * | 0 |
| | | |

=

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | * | |
| | | |

=

| * |
|---|

×

| | |
|---|---|
| | |
| | |

(w ostatnim etapie kratki leżące w rogach przysuwają się do siebie).

Taki proces od razu przekształca macierz typu 3 × 3 w macierz 2 × 2 pomnożoną przez liczbę w kratce oznaczonej gwiazdką. Wiemy już, w jaki sposób wykonywać obliczanie z macierzami typu 2 × 2. Należy obliczyć różnicę między iloczynami elementów leżących na przekątnych. W przypadku macierzy 4 × 4 proces musi być do-

konany dwukrotnie po to, aby zmniejszyć macierz do macierzy 2 × 2 (z dwoma mnożnikami)[18].

Po udowodnieniu, że zero położone w pewnych strategicznych punktach zakreskowanej części macierzy jest wygodne, przechodzimy teraz do sposobów otrzymywania takich zer. Obowiązywać nas będą następujące reguły:

1. Wolno dodawać liczby dowolnego wiersza do liczb dowolnego drugiego wiersza, kratka do kratki.

2. Odejmowanie cieszy się tymi samymi przywilejami: wolno odejmować liczby dowolnego wiersza od liczb innego wiersza stosując tę samą zasadę odejmowania kratkami.

3. Przed dodaniem liczb jakiegoś wiersza do liczb innego wiersza wolno pomnożyć je przez co tylko chcemy.

4. Kolumny nie są od macochy i dlatego wszystko, co powiedzieliśmy odnośnie wierszy, odnosi się także do kolumn.

5. Pracować trzeba z wyczuciem. (Potęga piątej reguły polega na tym, że zera umieszcza się w jednych miejscach łatwo, w innych trudniej. Rozglądnijmy się więc uważnie w poszukiwaniu dobrego miejsca do natarcia.)

Wróćmy do macierzy

| | | |
|---|---|---|
| 7 | −3 | −2 |
| −2 | −1 | 4 |
| 2 | 2 | 1 |

i zastosujmy nasze nowe zasady. Ostatni wiersz zawiera dwie dwójki i jedną jedynkę (5 reguła). Stosując odejmowanie (2 reguła) i trochę mnożenia (3 reguła) powinniśmy otrzymać zera w odpowiednich miejscach. Rozpoczniemy od odjęcia kolumny 2 od kolumny 1:

| | | |
|---|---|---|
| 10 | −3 | −2 |
| −1 | −1 | 4 |
| 0 | 2 | 1 |

Mamy pierwsze zero. Drugie zero pojawi się obok pierwszego przez pomnożenie ostatniej kolumny przez 2 i odjęcie jej od drugiej kolumny:

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 1 | −2 |
| −1 | −9 | 4 |
| 0 | 0 | 1* |

I to jest właśnie to, co chcieliśmy otrzymać, ponieważ ostatni wiersz składa się teraz z zer, z wyjątkiem jednej kratki. Lecz

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ -1 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & \\ -1 & -9 & \\ & & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times [10 \times (-9) - 1 \times (-1)] = -89$$

Liczba 89 jest względną częstotliwością Czerwony 1 w grze, z którą spotkaliśmy się na s. 146. Jeśli wbijamy się już w dumę, że rozumiemy cały proces, nadarza się świetna okazja, by dowieść tego przy obliczeniu względnej częstotliwości dla Czerwony 2.

Wykreślając drugą kolumnę w początkowej zakreskowanej macierzy

*Czerwony*

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | −3 | −2 |
| −1 | −2 | −1 | 4 |
| −5 | 2 | 2 | 1 |

otrzymujemy:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | −3 | −2 |
| −1 | −1 | 4 |
| −5 | 2 | 1 |

Ta macierz określa względną częstotliwość Czerwony 2. Drugi wiersz zapowiada łatwy sposób otrzymania zer. Dlatego rozpoczniemy od odjęcia drugiej kolumny od pierwszej, co daje:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | −3 | −2 |
| 0 | −1 | 4 |
| −7 | 2 | 1 |

Następnie mnożymy drugą kolumnę przez 4 i dodajemy do trzeciej

| | | |
|---|---|---|
| 4 | −3 | −14 |
| 0 | −1* | 0 |
| −7 | 2 | 9 |

To jest równoważne

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | −14 |
| | −1* | |
| −7 | | 9 |

$= \boxed{-1^*} \times \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} =$

$= -1\times[4\times9-(-7)\times(-14)]=62$

i otrzymujemy względną częstotliwość Czerwony 2. Następnie znajdujemy, że względne częstotliwości Czerwony 3 i Czerwony 4 są równe odpowiednio 119 i 83.

Aby określić optymalną mieszaną strategię Niebieskiego, musimy powrócić do pierwotnej macierzy, tj. do macierzy

| Niebieski | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 0 | 3 |
| 2 | 0 | 0 | 3 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 6 | 0 | 2 | 0 |

i utworzyć nową zakreskowaną macierz przez odejmowanie każdej wypłaty od jej sąsiadki z lewej:

| Niebieski | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | −6 | 7 | −3 |
| 2 | 0 | −3 | −2 |
| 3 | −1 | −2 | 3 |
| 4 | 6 | −2 | 2 |

Wykreślając pierwszy wiersz otrzymujemy:

| | | |
|---|---|---|
| 0 | −3 | −2 |
| −1 | −2 | 3 |
| 6 | −2 | 2 |

Ta macierz określa wielkość względnej częstotliwości dla Niebieski 1. Niezbędne dla jej określenia zera powstaną

przez sześciokrotne dodanie drugiego wiersza do trzeciego. To daje

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1^* & -2 & 3 \\ 0 & -14 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}  & -3 & -2 \\ -1^* &  &  \\  & -14 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1^* \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -14 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\times[(-3)\times 20-(-14)\times(-2)]=88$$

Względne częstotliwości dla Niebieski 2, Niebieski 3 i Niebieski 4 określa się w podobny sposób. Ostateczny rezultat można przedstawić w postaci następującej macierzy:

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 | 4 | *Częstotliwości Nieb.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 0 | 3 | 88 |
| 2 | 0 | 0 | 3 | 5 | 86 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 1 | 78 |
| 4 | 6 | 0 | 2 | 0 | 101 |
| *Częstotliwości Czerw.* | 89 | 62 | 119 | 83 | |

Oczywiście, niezbędne jest sprawdzenie, czy te względne częstotliwości stanowią rzeczywiste rozwiązanie gry. Nie mam nic przeciwko temu, żebyś, Czytelniku, wykonał to sprawdzenie. Cenę gry można znaleźć stosując optymalną mieszaną strategię Czerwonego przeciw np. strategii Niebieski 2 (optymalna mieszana strategia dowolnego gracza może być naturalnie zastosowana przeciwko dowolnej czystej strategii wchodzącej w mieszaną strategię drugiego gracza), tj.

$$\frac{119\times 3+83\times 5}{89+62+119+83}=\frac{772}{353}$$

Dlatego średnia wygrana Niebieskiego przy prawidłowej grze powinna wynieść nieco ponad 2 jednostki na partię.

Zanim staniemy nieco osłupiali przed następną serią ćwiczeń, musimy zapoznać się z jednym jeszcze przykładem, wymagającym podwójnego zastosowania metody skrócenia macierzy. W grze

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 |

jak możecie sami się przekonać, nie ma ani punktów siodłowych, ani dominowania (a może jest?). Następnie, zwracając uwagę na mieszaną strategię Czerwonego, odejmujemy każdą wypłatę od wypłaty umieszczonej bezpośrednio nad nią. To nam da

*Czerwony*

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| −3 | 1 | 0 | 1 | −2 |
| 3 | 0 | −2 | 0 | 0 |
| −1 | −3 | 2 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | −3 | −1 | 1 |

Załóżmy teraz, że chcemy znaleźć względną częstotliwość dla Czerwony 3. Po skreśleniu kolumny Czerwony 3, otrzymamy następującą macierz:

| | | | |
|---|---|---|---|
| −3 | 1 | 1 | −2 |
| 3* | 0 | 0 | 0 |
| −1 | −3 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | −1 | 1 |

Okazuje się, że drugi wiersz ma już pożądaną postać: wszystkie wypłaty — z wyjątkiem jednej — równe są zeru. Dlatego możemy od razu skrócić macierz rozpoczynając od wyłączenia wypłat umieszczonych na północ, południe i wschód od wypłaty 3*:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | −2 |
| 3* | | | |
| | −3 | 1 | 1 |
| | 1 | −1 | 1 |

= 3* ×

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | −2 |
| −3 | 1 | 1 |
| 1 | −1 | 1 |

Przy skracaniu tej macierzy 3 × 3 naszą uwagę przyciągają liczby w drugiej kolumnie. Jest bowiem oczywiste, że możemy otrzymać wymarzone zera przez dodanie trzeciego wiersza do pierwszego, a następnie do drugiego. Postępując tak otrzymamy

$$\boxed{3^*} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -2 \\ \hline -3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} = \boxed{3^*} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 0 & -1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -1^* & 1 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \boxed{3^*} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & -1 \\ \hline -2 & & 2 \\ \hline & -1^* & \\ \hline \end{array} = \boxed{3^*} \times \boxed{-1^*} \times \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -1 \\ \hline -2 & 2 \\ \hline \end{array} =$$

$$= 3 \times (-1) \times [2 \times 2 - (-2) \times (-1)] = -6$$

Poznaliśmy, być może, tę szóstkę, która jest względną częstotliwością Czerwony 3, ponieważ jest to ten sam przykład, jaki rozwiązaliśmy przez odkrycie na początku rozdziału.

**P r z y k ł a d 22 — Używany samochód**: Gladyn i Don odziedziczyli samochód o wartości 800 dolarów. Znając dobrze przekleństwo spółki zgodzili się rozstrzygnąć problem własności za pomocą stawek w zaklejonych ko-



pertach. To z nich, które zaproponuje wyższą sumę, otrzyma samochód i zapłaci tę sumę drugiemu spadkobiercy. Jeśli zaś stawki będą jednakowe (co jest zupełnie możliwe, ponieważ umówili się, że kolejne stawki będą się różnić od siebie co najmniej o 100 dolarów), to o własności rozstrzygnie rzut monetą, a wymiana dóbr nie nastąpi. Gladyn ma w ręku 500 dolarów, Don zaś 800. Jak powinni wyznaczyć swoje stawki?

W przypadku, gdy problem rozstrzygnie moneta, ich szanse na wygraną są równe. Ponieważ wóz wart jest 800 dolarów, to szanse te można ocenić na 400 dolarów. Posiadając tę informację, możemy wypełnić macierz wypłat oczekiwanymi wygranymi Gladyn (w setkach dolarów):

| Stawka Gladyn \ *Stawka Dona* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | *Wiersze Min* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 |
| 1 | 7 | 4 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 2 |
| 2 | 6 | 6 | 4 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 3 |
| 3 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 4* |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 4* |
| 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 3 |
| *Kolumny Max* | 7 | 6 | 5 | 4* | 4* | 5 | 6 | 7 | 8 | |

Przede wszystkim sprawdzamy grę na punkt siodłowy i widzimy natychmiast, że istnieje: maksimin i minimaks są równe 400 dolarów. W rzeczywistości gra zawiera 4 punkty siodłowe: każdy gracz powinien wyznaczyć bądź 300, bądź 400 dolarów. Stawka 300 dolarów jest nieco bardziej atrakcyjna, ponieważ w tym przypadku przegrana tego, kto gra nieprawidłowo, zwiększa się.

**Przykład 23 — Opryskiwacze:** Firma Harrisa i Danskina zajmująca się opryskiwaniem drzew ulega likwidacji. Obaj wspólnicy chcą odkupić od spółki sprężarkę o wartości 400 dolarów i ćwierćtonową furgonetkę — pick-up wartości ok. 600 dolarów. Zapadła decyzja zorga-



nizowania zamkniętej sprzedaży (jak w przykładzie 22), przy czym ceny wyznaczone są co 200 dolarów dla każdego obiektu. W przypadku remisu o własności zadecyduje partia pokera. Otrzymana ze sprzedaży suma jest własnością firmy i zostanie rozdzielona między partnerów po połowie.

Będziemy oznaczać każdą strategię ustalania cen za pomocą indeksu składającego się z dwóch cyfr, np. 42, tzn. że za sprężarkę wyznaczono cenę 400 dolarów, za ciężarówkę zaś — 200 dolarów. Teraz już łatwo obliczyć, w setkach dolarów, macierz wypłaty (dla Harrisa).

Jeśli np. Harris stawia 22, a Danskin 06, to Harris otrzymuje sprężarkę o wartości 4 i połowę aktywów, tj. 2 + 6 wartości 4. Tak więc, wpłaciwszy 2 zarabia netto 6. Przy jednakowych stawkach wypłaty obliczane są jako połowa nominalnej wartości obu przedmiotów, co odpowiada kaprysom Natury przy grze w pokera. Macierz gry ma postać:

*Danskin*

| *Harris* | 00 | 02 | 04 | 06 | 20 | 22 | 24 | 26 | 40 | 42 | 44 | 46 | *Wiersze Min* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 5 | 3 | 4 | 5 | 4 | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 | 2 |
| 02 | 7 | 5 | 4 | 5 | 6 | 4 | 3 | 4 | 7 | 5 | 4 | 5 | 3 |
| 04 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 |
| 06 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| 20 | 6 | 4 | 5 | 6 | 5 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 5 | 3 |
| 22 | 8 | 6 | 5 | 6 | 7 | 5 | 4 | 5 | 7 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| 24 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5* |
| 26 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5* |
| 40 | 5 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 5 | 3 |
| 42 | 7 | 5 | 4 | 5 | 7 | 5 | 4 | 5 | 7 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| 44 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5* |
| 46 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5* |
| *Kolumny Max* | 8 | 7 | 6 | 6 | 7 | 6 | 5* | 5* | 7 | 6 | 5* | 5* | |

Przy sprawdzeniu szybko okazuje się, że ta gra 12 × 12 obfituje w punkty siodłowe. Jest 16 takich punktów odpowiadających strategiom 24, 26, 44 i 46. Każda z nich zapewnia sprawiedliwe szanse każdemu z partnerów, lecz niektóre srożej karzą słabiej grającego przeciwnika. Stawki 200 i 400 dolarów za sprężarkę i ciężarówkę mogą przynieść Harrisowi czysty dochód 700 dolarów, jeśli Danskin będzie grał nieuważnie. Jeśli takie ceny wyznaczył Danskin, to Haris może otrzymać czysty dochód w wysokości zaledwie 300 dolarów. Jeśli gracze nie posługują się strategiami odpowiadającymi punktom siodłowym, to ich wygrane mogą sięgać od 200 do 800 dolarów.

Ponieważ cena gry równa jest 500 dolarów dla Harrisa, to może się wydawać, że gra jest niesprawiedliwa dla Danskina. W istocie ta gra jest symetryczna: kapitał firmy wynosi 1000 dolarów i Danskin otrzyma połowę kapitału.

Stwierdzenie, że jedna dobra strategia jest niekiedy lepsza niż inna dobra strategia, może łatwo rozpalić gorące spory w każdej grupie znawców teorii gier. Srodzy kapłani tego kultu zaprzeczą, że zasada minimaksu — równości maksiminu i minimaksu w wypadku punktu siodłowego — jest jedyną regułą i kryterium w księdze doktryn znanej pod nazwą Teorii Gier.

A dalej, że jeśli to kryterium jest spełnione, nie ma nic do dodania. Przyjęcie tego punktu widzenia do obecnej sytuacji oznacza, że przy naszym podejściu do punktu siodłowego zakładamy, iż przeciwnik jest dostatecznie mądry, aby ocenić jego wartość.

„Godząc się z tym punktem widzenia, lepiej już przestańmy kręcić — powiadają — i twierdzić, że jeden punkt siodłowy jest lepszy od drugiego, ponieważ przeciwnik może nie trzymać się strategii z punktem siodłowym".

Autor żywi pewną sympatię dla tej uwagi: ale niezbyt wielką.

**Przykład 24 — Kolorowy poker:** Mel i Ray nie umieją dobrze liczyć i to przeszkadza im trochę w zwykłym pokerze. Rozróżniają jednak dobrze kolory i dlatego wymyślili następujący wariant gry: każdy stawia do banku przed grą 1 dolara, po czym z przetasowanej talii dostają po jednej karcie — i to wszystko, co otrzymują. Czarna karta uchodzi za lepszą od czerwonej; poza tym wszystkie karty są dla tych prostaków jednakowe.

Mel, pierwszy gracz, może pasować lub postawić do banku 1 dolara. Jeśli spasował, to karty się odkrywa i bank dostaje się temu, kto ma silniejszą kartę. Jeśli karty są jednakowe, to bank dzieli się po połowie. Jeśli Mel stawia, to Ray może spasować (przegrywając tym samym), sprawdzić przez postawienie dolara (zmuszając do otwarcia kart) lub przebić stawiając 2 dolary.

Jeśli Ray stawia 2 dolary, to Mel może spasować (przegrywając tym samym) lub sprawdzić stawiając 1 dolara (co prowadzi do otwarcia kart).

Tak więc, każdy gracz może ryzykować jednym, dwoma lub trzema dolarami w każdym rozdaniu i jego strategie określone są przez sumy, które chce zaryzykować na czerwoną, czy czarną kartę. Cyframi w nawiasach (1, 3) będziemy oznaczać taką strategię, przy której gracz chce zaryzykować 1 dolara na czerwoną kartę i 3 dolary na czarną. Każdy gracz ma 9 strategii tego typu.

Napisanie macierzy wypłat jest proste, lecz męczące. Dla każdej pary strategii wykonamy obliczenia następującego rodzaju [dla przykładu obliczono strategię Mel (2,2) przeciw Ray (3,2)]:

| | | Ray trzyma: czerwoną i stawia 3 | Ray trzyma: czarną i stawia 2 |
|---|---|---|---|
| Mel trzyma: | czerwoną i stawia 2 | −2 | −2 |
| | czarną i stawia 2 | −2 | 0 |

Obie lewe kratki odpowiadają wypadkom, gdy Mel przegrywa 2 dolary, ponieważ poddaje się bluffowi Ray'a, który zagrał o wysokie stawki. Górna prawa kratka przedstawia przegraną dwóch dolarów przy otwarciu kart; Ray ma lepszą kartę. Niższa prawa kratka odpowiada sytuacji równych kart; jako rezultat otrzymujemy remis. Talia zawiera jednakową ilość czerwonych i czarnych kart, dlatego też szanse sprzyjające każdemu z czterech układów, którym odpowiadają kratki, są jednakowe. Dlatego średnia cena gry przy zastosowaniu Mel (2,2) przeciw strategii Ray (3,2) równa się

$$\frac{1\times(-2)+1\times(-2)+1\times(-2)+1\times 0}{1+1+1+1}=-\frac{6}{4}$$

To znaczy przegrana $^{6}/_{4}$ dla Mela. Ponieważ stawki wyrażone są w dolarach, to ćwiartki są monetami 25-centowymi. Wygodniej wyliczać wypłaty w macierzy w tych monetach, tak więc liczby w kratkach przytoczonej poniżej macierzy oznaczają liczbę 25-centowych monet, które (średnio) przechodzą z rąk do rąk.

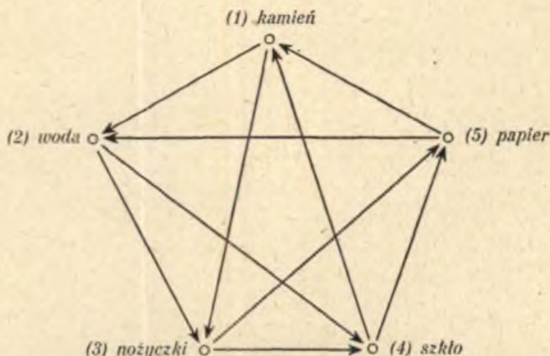
| Mel \ Ray | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0* |
| 1,2 | 1 | 0 | −2 | 2 | 1 | −1 | −2 | −3 | −5 | −5 |
| 1,3 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0* |
| 2,1 | 3 | 0 | 0 | 2 | −1 | −1 | 0 | −3 | −3 | −3 |
| 2,2 | 4 | 0 | −2 | 4 | 0 | −2 | −2 | −6 | −8 | −8 |
| 2,3 | 4 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 3 | −1 | −1 | −1 |
| 3,1 | 3 | 0 | −1 | 2 | −1 | −2 | 2 | −1 | −2 | −2 |
| 3,2 | 4 | 0 | −3 | 4 | 0 | −3 | 0 | −4 | −7 | −7 |
| 3,3 | 4 | 0 | −1 | 4 | 0 | −1 | 5 | 1 | 0 | −1 |
| Kolumny Max | 4 | 0* | 0* | 4 | 1 | 1 | 5 | 2 | 2 | |

Analiza nie okazała się na szczęście męcząca. Od razu znalazły się punkty siodłowe: cztery z nich odpowiadają strategiom Mel (1,1) lub (1,3) przeciw Ray (1,2) lub (1,3). Tak więc, żaden z graczy nie powinien bluffować grając o wysoką stawkę, gdy ma w ręku kiepską kartę, lecz przy dobrych kartach Mel może grać rozbrajająco zaniżone stawki (zaś Ray — średnie).

Cena gry w punktach siodłowych równa jest zeru; gra jest zatem sprawiedliwa. Jest to trochę nieoczekiwane, jeśli uwzględnimy asymetrię gry i macierzy wypłat. Przykład powyższy pozwala ukazać trudności, na jakie napotykalibyśmy przy analizie zwykłego pokera.

**Przykład 25 — Dla starszych dzieci:** W rozdz. 3 rozpatrywaliśmy grę dziecinną — „Kamień — Papier — Nożyczki". Przekształcić ją można dwoma różnymi sposobami w grę z 5 elementami dla starszych dzieci. W jednej z nich istnieje rozwiązanie intuicyjnie oczywiste, w drugiej zaś, brak takiego.

Nazwijmy tę grę „Kamień, woda, nożyczki, papier, szkło". Każde dziecko wie, że woda zwilża kamień i papier, nożyczki są droższe niż woda i kamień, szkło jest bardziej kruche niż woda i nożyczki, papier bardziej giętki niż nożyczki i szkło, a kamień grubszy niż szkło i papier. Te stosunki można przedstawić za pomocą rysunku, na którym strzałki pokazują kierunki podrzędności:



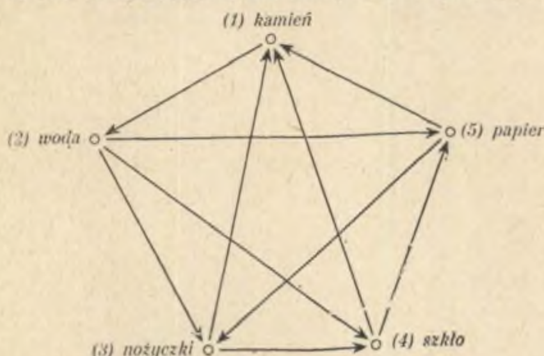

Jeśli oznaczyć wygraną, przegraną i remis dla Niebie-

skiego odpowiednio jako 1, −1 i 0, zaś strategię liczbami przytoczonymi na rysunku — to macierz wypłat będzie miała postać:

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | −1 | −1 | −1 |
| 3 | −1 | 1 | 0 | −1 | 1 |
| 4 | −1 | 1 | 1 | 0 | −1 |
| 5 | −1 | 1 | −1 | 1 | 0 |

Po bezowocnym sprawdzaniu na punkty siodłowe i dominowanie, metoda, która może być zastosowana przy istnieniu wszystkich aktywnych strategii, daje wreszcie rozwiązanie 1 : 1 : 1 : 1 : 1 dla każdego gracza, tzn. powinni oni stosować strategię z jednakowymi częstotliwościami.

Jeśli zmienić kierunek trzech strzałek zakładając, powiedzmy, że ostatecznie papier pali się lepiej niż woda, że nożyczki kroją papier, zaś kamień rozbija nożyczki —




to macierz wypłat będzie miała formę:

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −1 | −1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | −1 | −1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | −1 | −1 |
| 4 | −1 | 1 | 1 | 0 | −1 |
| 5 | −1 | −1 | 1 | 1 | 0 |

Po chwili namysłu stwierdzamy, że rozwiązanie dla gry „Kamień, woda, nożyczki, szkło, papier" będzie teraz 3 : 3 : 1 : 1 : 1.

**Przykład 26 — Woźny sądowy**: Gary, woźny sądowy, pilnuje to jednych drzwi, to drugich, chce bowiem spotkać Steve'a, gdy będzie wychodził z domu, i doręczyć mu wezwanie. Scott, przyjaciel Steve'a, też jest w budynku i chce mu pomóc. Ponieważ nigdy dotychczas nie mieli takiego kłopotu, nie mogą rozpoznać Gary'ego w tłumie.

Mogą wyjść z gmachu przez każde drzwi, przy tym każdy z nich może wyjść pierwszy. Gary może doręczyć wezwanie bądź pierwszemu, bądź drugiemu mężczyźnie, jaki pojawi się w pilnowanych przez niego drzwiach. Jeśli spróbuje przekazać wezwanie Scottowi, to Steve — zobaczywszy to z okna — wymknie się drugim wyjściem. Doręczenie wezwania Steve'owi ocenia się jako 1 na korzyść prawa, zaś niepowodzenie jako 0.

Gary ma 4 czyste strategie: może pilnować jednych lub drugich drzwi, doręczyć wezwanie, lub nie, pierwszemu zobaczonemu człowiekowi.

Steve ma bogatszą i bardziej skomplikowaną kolekcję strategii. Dwie z nich polegają na tym, że wychodzi pierwszy jednymi z drzwi. Jeśli stosuje jedną z tych strategii, to dalsze decyzje są niepotrzebne. Ma jeszcze cztery inne strategie: posyła Scotta przez jedne drzwi i obserwuje rozwój wypadków; jeśli Scottowi wręczają wezwanie, on umyka przez drugie drzwi; jeśli nikt nie podejdzie do Scotta, to powinien iść za nim, mając nadzieję, że jakoś to będzie. Istnieją cztery strategie, polegające na pojawieniu się Scotta od frontu lub z tyłu i pójścia za min przez te drzwi lub wyjście przez inne.



W rezultacie jest to gra 4 × 6. Po określeniu czystych strategii, nie-

trudno napisać macierz wypłat. Literami *F* i *T* oznaczono wykorzystanie przez Steve'a frontowych i tylnych drzwi, zaś literami *f* i *t* — to samo dla Scotta.

| Drzwi strzeżone | | Dyżurny | | Steve i Scott: *F* (1) | *T* (2) | *f,F* (3) | *f,T* (4) | *t,T* (5) | *t,F* (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *frontowe* | | 1 | (1) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | 2 | (2) | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| *tylne* | | 1 | (3) | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | 2 | (4) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Nasze zwykłe metody rozwiązywania działają doskonale, ponieważ mamy tu 4 aktywne strategie w optymalnej mieszanej strategii. W tej grze istnieje parę podstawowych mieszanych strategii: Steve może grać z względnymi częstotliwościami 1 : 1 : 1 : 1 dla dowolnych czterech strategii tworzących macierz 4 × 4 zawierającą po jednej jedynce w każdym wierszu i w każdej kolumnie; np. strategie 3, 4, 5, 6.

Optymalna mieszana strategia Gary'ego jest 1 : 1 : 1 : 1, zaś cena gry równa $1/4$ (na korzyść Gary'ego). Jeśliby Steve był w budynku sam, ta cena gry zwiększyłaby się do $1/2$. Dlatego współdziałanie Scotta jest bardzo wartościowe.

**Przykład 27 — Gra w monety:** W tej grze biorą udział dwaj gracze, z których każdy bądź zaciska w ręce monetę, bądź nie, po czym każdy gracz zgaduje, jaka jest suma pieniędzy w rękach obu grających. Każdy z nich ma cztery strategie:

a) nie brać do ręki monety i uważać, że suma równa jest 0.

b) wziąć monetę i uważać, że suma równa jest 1.

c) wziąć monetę i uważać, że suma równa jest 1.

d) wziąć monetę i uważać, że suma równa jest 2.

Uważając remis za zero, a wygrane i przegrane dla Niebieskiego za 1 i −1, otrzymujemy następującą grę:

| | | Czerwony | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Niebieski | 1 | 0 | 1 | −1 | 0 |
| | 2 | −1 | 0 | 0 | 1 |
| | 3 | 1 | 0 | 0 | −1 |
| | 4 | 0 | −1 | 1 | 0 |

W tej grze nie ma ani punktów siodłowych, ani dominowania, zaś metoda stosowana przy istnieniu wszystkich aktywnych strategii daje dla wszystkich strategii zerowe częstotliwości względne. Mamy więc kłopoty: gra 4 × 4 musi zawierać jakąś małą grę, której rozwiązanie spełnia grę dużą. Spośród składowych gier 2 × 4, istnieje gra

| | | Czerwony | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Niebieski | 2 | −1 | 0 | 0 | 1 |
| | 3 | 1 | 0 | 0 | −1 |

Łatwo dojść do wniosku, że Niebieski 2 i Niebieski 3 winny być grane z względnymi częstotliwościami 1 : 1, zaś Czerwony winien stosować strategie z częstotliwościami 1 : 0 : 0 : 1. To rozwiązanie jest zarazem rozwiązaniem całej gry.

Zwróćmy uwagę jednak, że ta optymalna mieszana strategia nie jest jedyną możliwą, ponieważ dla tej gry 2 × 4

| | | Czerwony | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Niebieski | 1 | 0 | 1 | −1 | 0 |
| | 4 | 0 | −1 | 1 | 0 |

również istnieje rozwiązanie, które spełnia pierwotną grę, a mianowicie 1 : 0 : 0 : 1 i 0 : 1 : 1 : 0 odpowiednio dla Niebieskiego i Czerwonego.

Tak więc, znamy teraz dwa sposoby rozgrywki: zastosować strategie 1 i 4 lub strategie 2 i 3, przy czym którąkolwiek parę strategii wybierzemy, należy je stosować równie często. Jest także oczywiste, że możemy pójść o krok dalej i otrzymać ogólniejsze rozwiązanie oparte na obu mieszanych strategiach, a mianowicie, stosować

wszystkie cztery strategie, z tym tylko warunkiem, aby względna częstotliwość dla Niebieski 1 była taka sama, jak dla Niebieski 4, a dla Niebieski 2 była taka sama, jak dla Niebieski 3 (to samo dotyczy Czerwonego). Na przykład, mieszana strategia 7 : 3 : 3 : 7 jest równie dobra dla każdego z graczy, jak strategia 3 : 7 : 7 : 3 lub dowolna inna osobna kombinacja liczb.

Po raz pierwszy zwracamy uwagę, że gra może mieć więcej niż jedną optymalną strategię mieszaną, lecz po prawdzie spotkaliśmy się już z tym wcześniej, gdy mieliśmy obfitość punktów siodłowych, a strategiami optymalnymi były czyste strategie. Ta zasada jest zupełnie ogólna i chyba oczywista: Jeśli gra ma parę rozwiązań, przy czym każde z nich jest bądź czystą, bądź mieszaną strategią, to mogą one być z kolei mieszane w dowolny sposób.

**P r z y k ł a d 28 — Dylemat administracyjny:** Szef gangu, Paul, zademonstrował swoją sztukę rozpruwania kasy pancernej, a następnie wyciągnął obie ręce, by rozpocząć zgarnianie. Zamarł jednak, gdy nowy członek szajki Cecil-Cyngiel wyjął coś z kieszeni i schował rękę pod krawędzią stołu.



— „O co chodzi Cecil?

— Tak sobie pomyślałem, Paul, że będzie bardzo miło z twojej strony, jeśli zrobisz mi niewielki prezent z okazji — powiedzmy — mego przystąpienia do twojej bandy. Dasz mi całą dolę, a twoja spluwa także mi się przyda. Nie trać czasu na rozmyślania, co mam w ręce. To jest po prostu..."

Cecil chciał, być może, powiedzieć: pistolet. Z drugiej strony, mogła to być jakaś niewinna rzecz: na przykład fajka. W każdym razie Paul musi rozwiązać skomplikowany problem administracyjny.

Paul czuje, że pieniądze w tym wypadku grają stosunkowo niewielką rolę. Znacznie ważniejszą stawką jest jego życie i prestiż. Rozpoczynając od najczarniejszych przypuszczeń, wylicza ewentualne możliwości:

a) zobaczyć pistolet i zostać zastrzelonym,

b) przestraszyć się fajki, o której Cecil powiedział, że jest fajką,

c) przestraszyć się fajki, o której Cecil powiedział, że to pistolet,

d) przestraszyć się pistoletu, o którym Cecil powiedział, że to pistolet,

e) przestraszyć się pistoletu, o którym Cecil powiedział, że to fajka,

f) zobaczyć fajkę, o której Cecil powiedział, że to fajka,

g) zobaczyć fajkę, o której Cecil powiedział, że to pistolet.

Paul postanowił ocenić te możliwości według skali od 0 do 10. Najgorszą ewentualność (a) ocenia jako zero, a swój triumf (g) jako 10 — to chyba jasne. Wyznaczenie ceny innym możliwościom jest zadaniem niewdzięcznym, które może zepsuć nam nastrój; pamiętajmy jednak, że Paul również cierpi[19]. Postanawia ocenić pięcioma oczkami sytuację, w której zostanie zupełnie wystawiony do wiatru, a pozostałe możliwości — 6, 7, 8 i 9 oczkami. Cecil ma cztery strategie: może błysnąć pistoletem lub tego nie uczynić, i może powiedzieć, że ma pistolet lub tego nie powiedzieć. Paul ma także cztery strategie: może wierzyć lub nie wierzyć temu, co powie Cecil, bądź też może uwierzyć w pistolet, a nie wierzyć innym wiadomościom lub też na odwrót. W rezultacie otrzymujemy grę

| | | Cecil | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *pP* 1 | *pF* 2 | *fP* 3 | *fF* 4 |
| Paul | *WP, WF* 1 | 7 | 0 | 6 | 9 |
| Paul | *WP, WF* 2 | 7 | 8 | 6 | 5 |
| Paul | *NP, WF* 3 | 0 | 0 | 10 | 9 |
| Paul | *NF, NF* 4 | 0 | 8 | 10 | 5 |

Literami *p* i *f* oznaczono tutaj pistolet i fajkę, *P* i *F* —

informacja Cecila; *W* i *N* — wiara lub niewiara w informację.

Tak więc druga czysta strategia Cecila polega na tym, by wyjąć pistolet i powiedzieć, że ma w ręku fajkę. Pierwsza czysta strategia Paula polega na tym, że uwierzy informacji Cecila ' to będzie jego ostatnia minuta.

Rozwiązanie otrzymujemy standardowymi metodami. Rozwiązywanie gra typu 4 × 4 nie przyniesie niczego prócz kłopotów. Dlatego szukamy rozwiązania typu 3 × 3. Ponieważ Paul 3 i Cecil 3 wydają się nieciekawe, próbujemy obejść się bez nich i uzyskujemy sukces. Rozwiązaniem dla Paula jest mieszana strategia 7 : 17 : 0 : 4. Cena gry równa jest 6. Cecil może doprowadzić wypłatę do tej wartości stosując mieszaną strategię 0 : 1 : 0 : 2 (oprócz rozwiązania 7 : 17 : 0 : 4 Paul ma także rozwiązanie 1 : 3 : 0 : 0 i 3 : 21 : 4 : 0).

Może nas dziwić, że Paul nie chwyta się strategii Paul 2, tzn. wierzy w pistolet, a nie wierzy w fajkę. Ceni on jednak wysoko swój prestiż. Gdyby nie przykładał do niego takiej wagi, tj. gdyby zgrupował wszystkie wypłaty (z wyjątkiem zerowej) w pobliżu 10, zachowując jednak kolejność w skali, wówczas wzrosłaby względna częstotliwość stosowania strategii Paul 2. Jeśli np. zastosować skalę wypłat: 0; 9,5; 9,6; 9,7; 9,8; 9,9; i 10 (zamiast 0, 5, 6, 7, 8, 9, 10) — tzn. przykładać niewielką wagę do czynnika prestiżu, to rozwiązanie byłoby już 291 : 9411 : 0 : 192, czyli praktycznie 3 : 94 : 0 : 2. Innym rozwiązaniem będzie 3 : 99 : 0 : 0. Tak więc nawet w tym wypadku nie powinien trzymać się ślepo tylko drugiej strategii. W tej grze Cecil powinien stosować miks 0 : 4 : 0 : 98, czyli powinien zawsze mówić, że ma w ręce fajkę i prawie zawsze powinno to być prawdą.

**Przykład 29 — Problem pułkownika Blotto:** Komendant grupy bojowej, który najpierw bał się, że nie wejdzie w kontakt z Czerwonymi, boi się teraz, że będzie miał z nimi kontakt nazbyt bliski, ponieważ jego pododdziały już od 10 minut prowadzą działania wojenne na obu kierunkach natarcia.

Gdy planował tę operację, II-gi oddział sztabu ocenił siłę przeciwnika na 600 ludzi, podczas gdy jego własny

wywiad ustalił teraz liczebność nieprzyjaciela na 1000 ludzi (prawdopodobnie 5 kompanii). Dlatego jego dwa bataliony strzelców (6 kompani) mają teraz przewagę tylko jednej kompanii, zamiast komfortowej przewagi podwójnej, na którą liczył. Wydał więc rozkaz: zniszczyć maksymalną ilość żołnierzy wroga przy minimum strat własnych. Przedstawiciel Sztabu Generalnego, pułkownik odkomenderowany do jego jednostki na czas przeprowadzania operacji, uśmiechał się do siebie, gdy Dowódca przeczytał ten niemożliwy do wykonania rozkaz dowódcom batalionów i kompanii.



Jego kompanie Baker i Dog nawiązały kontakt z przeciwnikiem w pewnej odległości od głównych sił w kierunku na północny wschód i północny zachód. Pozostałe 4 kompanie były w rezerwie i mogły wejść do akcji w dowolnym miejscu. Oczekując przybycia dowódców batalionu Dowódca rozmyślał nad tym, co przedsięwziąłby ten oficer ze Sztabu Generalnego (który obecnie pocierał plecy o drzewo), gdyby odpowiedzialność spoczywała na nim. Na Boga, wyglądałby prawdopodobnie mniej spokojnie.

— „Jaki jest pański sąd o tym wszystkim, pułkowniku? Czy nie przypomina to panu pewnego epizodu z II wojny punickiej?

— Rzeczywiście, coś mi przypomina — ale coś odleglejszego niż wojny punickie. Czy słyszał pan o teorii gier?

— Nie mam o tym zielonego pojęcia.

— Latem wypadło mi przebywać jakiś czas w pewnym towarzystwie. A propos — lubi pan cywilów? Otóż oprócz innych rzeczy mówiono tam wiele o teorii gier, takiej matematycznej historii mającej jakoby pewien związek ze sprawami wojskowymi. Rozpatrywano pewien przy-

kład, nazwany problemem pułkownika Blotto. Pan daruje, ale to było typowe dla ich lekceważącego stosunku do wojska. W ogóle: niezdyscyplinowana banda. Tak czy inaczej ten Blotto znalazł się w prawie analogicznej sytuacji.

— I co mu podsunęła ta teoria? Prowadzić rokowania?

— Gorzej. Oni twierdzili — proszę pamiętać, że to nie jest moja idea — że powinien pan obserwować teraz tę mrówkę; nie, o tę właśnie, która chodzi po pańskim mapniku. Gdy tylko dojdzie do tłustej plamki, proszę spojrzeć na sekundnik pańskiego zegarka. Jeśli ukaże 6 sekund lub mniej, powinien pan równo podzielić siły między dwa zagrożone punkty. Jeśli odczyt będzie między 6 i 30 sekundami, przekazać całą rezerwę Danowi. Jeśli między 30 i 54 sekundami — to przekażcie rezerwę Harry'emu i wreszcie, jeśli między 54 i 60 sekundami — trzeba poszukać innej mrówki.

— Diabli nadali! ... No, dobra, spróbujmy."

Zrobimy teraz analizę sytuacji. Niebieski ma 6 kompanii, Czerwony — 5. Walki rozpoczynają się w dwóch punktach w sile kompanii. Niebieski ma następujące możliwości: rozdzielić swoje siły w stosunku 5 : 1; 4 : 2; 3 : 3; 2 : 4; lub 1 : 5. Czerwony może rozdzielić swoje siły w stosunku 4 : 1; 3 : 2; 2 : 3; 1 : 4. Przypuśćmy, że przy jednakowych siłach otrzymujemy remis; wygrywa zaś ten, kto ma więcej sił. Wypłata równa jest ilości pokonanych kompanii nieprzyjaciela minus ilość własnych strat. To odpowiada — jak się wydaje — charakterowi sytuacji i nie stoi w sprzeczności z bezsensownymi poleceniami wydanymi przez Niebieskiego. Macierz wypłat w tym przypadku ma postać:

| Niebieski \ *Czerwony* | 41 | 32 | 23 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| 51 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 42 | 1 | 3 | 0 | −1 |
| 33 | −2 | 2 | 2 | −2 |
| 24 | −1 | 0 | 3 | 1 |
| 15 | 0 | 1 | 2 | 4 |

zować prawie równomiernie rozdzielenie sił, nie zaś ich nierównomierny podział.

Cena gry (wypłata na korzyść Niebieskiego) równa jest $^{14}/_{9}$, tj. od jednej do dwóch kompanii. Historia z mrówką, mapą i wskazówką sekundnika jest sposobem losowania, niezbędnym do tego, by otrzymać względne częstotliwości 4 : 1 : 4, których potrzebuje Niebieski.

Nasz przykład można kontynuować. Załóżmy, że po dwóch bitwach nastąpi między żołnierzami pozostałymi przy życiu trzecia. W jaki sposób dowódcy powinni planować swoje początkowe bitwy, aby otrzymać najlepszy rezultat przy końcu operacji?

Zgodnie z przyjętymi regułami ta strona, która wejdzie do ostatniej bitwy z większą liczbą kompanii — wygrywa. Dlatego końcowa wypłata będzie równa początkowym siłom przeciwnika minus własne kompanie stracone w dwóch pierwszych bojach. Jeśli siły tych, którzy przeżyli są równe, to więcej strat nie będzie. Na podstawie tych reguł i macierzy pierwotnej dojdziemy łatwo do gry charakteryzującej nowo powstałą sytuację:

| Niebieski \ Czerwony | 41 | 32 | 23 | 14 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 5 | 4 | 4 | 4 | 10 |
| 42 | 5 | 5 | 3 | −1 | 0 |
| 33 | −5 | 5 | 5 | −5 | 1 |
| 24 | −1 | 3 | 5 | 5 | 0 |
| 15 | 4 | 4 | 4 | 5 | 10 |
| Częstotliwości Czerw. | 2 | 19 | 19 | 2 | |

Tu rozwiązanie dla Czerwonych można znów otrzymać przez kombinację dwóch rozwiązań, a mianowicie 1 : 7 : : 12 : 1 i 1 : 12 : 7 : 1. Cena gry równa jest $^{85}/_{21}$.

Porównując te rezultaty z poprzednimi widzimy, że taka sytuacja uwzględniająca wszystkie walki wymaga, aby Niebieski w jeszcze większym stopniu koncentrował swoje siły na jednym odcinku. Względnie częstotliwości na korzyść koncentracji wynoszą teraz 20 : 1, zamiast 8 : 1.

**Przykład 30 — Gra w mora:** Istnieje zabawa, zwana grą w mora. Na jej przykładzie zademonstrujemy zarówno siłę, jak i słabość teorii gier. Z jednej strony gracze muszą uciekać się do pomocy strategii, ponieważ jest mało prawdopodobne, by znaleźli przypadkiem odpowiedni sposób gry, z drugiej strony niezbędne są potworne obliczenia dla odnalezienia tej dobrej strategii.

Gra w mora polega na tym, że każdy gracz wystawia kilka palców i jednocześnie mówi, ile wystawi jego przeciwnik. Można pokazać jeden, dwa lub trzy palce. Jeśli tylko jeden gracz prawidłowo odgadnie ilość palców pokazanych przez przeciwnika, to jego wygrana równa jest sumie wszystkich palców wystawionych w danej partii. W pozostałych przypadkach wypłata równa jest zeru (wypłaty realizuje się raczej w pieniądzach, nie zaś w palcach). Tak np. jeśli Niebieski pokazał 3 palce i odgadł poprawnie, bo Czerwony wystawił jeden, ale sam wymienił dwa palce, to wygra Niebieski; jego wygrana wynosi 4 jednostki.

Każdy gracz może wystawić jeden, dwa lub trzy palce i może uważać, że przeciwnik uczyni to samo. Stąd każdy gracz ma 9 możliwości, to jest dziewięć czystych strategii. Oznaczmy te strategie liczbami dwucyfrowymi, na przykład 32; pierwsza cyfra wskazuje, ile palców pokazał, zaś druga cyfra, jaką ilość palców wymienił. Oznaczywszy strategię w taki sposób i obliczywszy wypłaty możemy przedstawić grę w mora w postaci następującej macierzy $9 \times 9$

| Niebieski \ *Czerwony* | 11 | 12 | 13 | 21 | 22 | 23 | 31 | 32 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0 | 2 | 2 | −3 | 0 | 0 | −4 | 0 | 0 |
| 12 | −2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | −4 | 0 | 0 |
| 13 | −2 | 0 | 0 | −3 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| 21 | 3 | 0 | 3 | 0 | −4 | 0 | 0 | −5 | 0 |
| 22 | 0 | −3 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | −5 | 0 |
| 23 | 0 | −3 | 0 | 0 | −4 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| 31 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | −5 | 0 | 0 | −6 |
| 32 | 0 | 0 | −4 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | −6 |
| 33 | 0 | 0 | −4 | 0 | 0 | −5 | 6 | 6 | 0 |

Przydałby się teraz błysk geniuszu, bo pośrednie obliczenia mogą przyprawić o chorobę. Nasze zwykłe metody dają zerowe częstotliwości dla wszystkich strategii gry $9 \times 9$, wydawałoby się, że żaden z graczy nie chce grać. Trzeba zatem wyłączyć jedną lub parę czystych strategii, po czym szukać rozwiązania skróconej w ten sposób gry.

Istnieje 9 gier $8 \times 8$, które należałoby rozpatrzyć (gdybyśmy nie wykorzystali symetrii byłoby ich 81), 36 gier $7 \times 7$ i 84 gry $6 \times 6$. W ten sposób tego nie zrobimy.

Dla pewnych powodów z pogranicza teorii liczb, i znając ostateczny wynik, zainteresowaliśmy się 126 grami $5 \times 5$, które są symetryczne względem swoich strategii. Szczęście nam dopisało i znaleźliśmy potrzebną grę już po dwóch próbach. Otrzymaliśmy ją jako rezultat wyłączenia pierwszej, czwartej, szóstej i dziewiątej strategii.

| | | *Czerwony* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 12 | 13 | 22 | 31 | 32 |
| *Niebieski* | 12 | 0 | 0 | 3 | −4 | 0 |
| | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| | 22 | −3 | 0 | 0 | 0 | −5 |
| | 31 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 32 | 0 | −4 | 5 | 0 | 0 |

Stosując metodę wszystkich strategii aktywnych, otrzymujemy (po uproszczeniu) następujące częstotliwości: 0 : 5 : 4 : 3 : 0.

Sprawdzając wynik przekonujemy się, że to rozwiązanie spełnia nie tylko naszą grę $5 \times 5$, lecz i wyjściową $9 \times 9$.

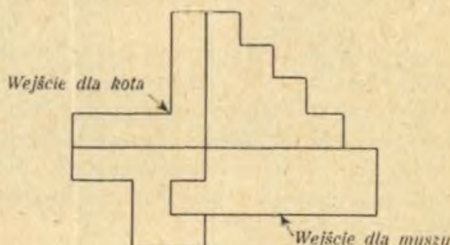
Tak więc mądrze grać w mora trzeba w następujący sposób:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| względne | 11 | 12 | 13 | 21 | 22 | 23 | 31 | 32 | 33 |
| strategia częstotliwości | 0 | 0 | 5 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 | 0 |

Inaczej mówiąc, należy stosować strategie: 1) pokazać jeden palec i odgadywać trzy palce, 2) pokazać dwa i wy-

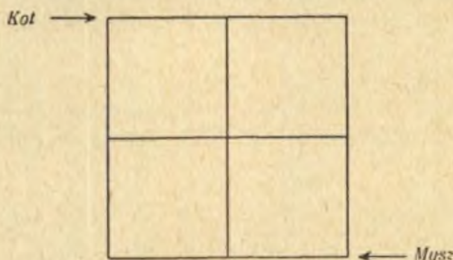
mienić też dwa palce, lub 3) pokazać trzy i zgadywać jeden palec. Wszystkie te strategie należy stosować z względnymi częstotliwościami 5 : 4 : 3. Cena gry równa jest zeru; gra jest oczywiście sprawiedliwa. Wydaje się, że trzeba nauczyć grać w mora przyjaciół, ponieważ rozwiązanie łatwo zapamiętać, a trudno znaleźć intuicyjnie.

**P r z y k ł a d 31 — Labirynt:** Kot i mysz wpadają do tego zamkniętego labiryntu

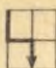
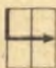
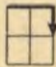



Mogą okrążać rogi, lecz nie wolno im zawracać. Poruszają się z jednakową szybkością i mają dość czasu, by przebiec czwartą część labiryntu. Potem, jeśli mysz jeszcze istnieje, może uważać, że jest uratowana. Jakie powinny być ich strategie?

Oba zwierzęta od razu rozumieją, że labirynt, do którego się dostały, jest równoważny następującemu:




a zatem jest osiem czystych strategii, które można schematycznie przedstawić w następujący sposób.

| *Strategia nr* | *Kot* | *Mysz* | *Strategia nr* | *Kot* | *Mysz* |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* |  |  | *5* |  |  |
| *2* |  |  | *6* |  |  |
| *3* |  |  | *7* |  |  |
| *4* |  |  | *8* |  |  |

Jeśli wynik „kot złapał mysz" ocenimy jako 1, a „kot przegapił mysz" jako zero — to kot będzie graczem chcącym otrzymać maksymalną wypłatę, a mysz graczem chcącym, by wypłata była minimalna. Porównując różne czyste strategie tworzymy macierz wypłat

*Mysz*

| *Kot* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Piąta strategia kota dominuje nad pierwszą, drugą, trzecią, szóstą i siódmą, zaś strategia czwarta dominuje nad ósmą. Oprócz tego pierwsza strategia myszy podporządkowana jest piątej strategii, ósma — czwartej, zaś druga, trzecia, szósta i siódma strategia myszy są jednakowe. Dlatego gra ulega znacznemu skróceniu.

*Mysz*

| *Kot* | 1 | 2 | 8 |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 1 |

i rozwiązanie jest proste: kot powinien z jednakową częstotliwością stosować swoją czwartą i piątą strategię, zaś mysz równie często pierwszą i ósmą strategię.

Odwołując się do opisu czystych strategii, widzimy, że kot powinien biec wzdłuż małych pętli, zaś mysz powinna przylepiać się do zewnętrznych ścian labiryntu.

**P r z y k ł a d 32 — Merlin:** — „Bardzo potrzebuję twojej pomocy — powiedziała Ginewra — Izolda wprowadziła idiotyczny zwyczaj, by zwycięzca turnieju przynosił jej chusteczkę, zaś mój champion często kończy grę w pozycji leżącej. Jest to naruszenie porządku; muszę z tym skończyć".

Lewa ręka Merlina zamieniła się w żabę, która zaczęła kumkać. Czarownik drgnął lekko i wyprostował się w fotelu.

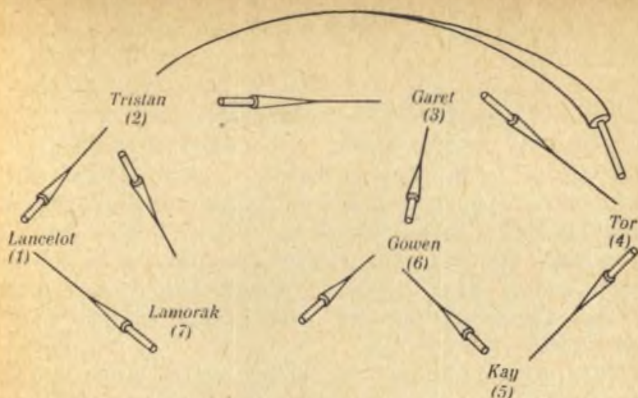
„Przepraszam bardzo, moja droga, mój umysł wędrował gdzieś przez chwilę... Tak, tak, turnieje, zupełnie nie interesowałem się nimi ostatnio. Jaka jest aktualna klasyfikacja rycerzy?

— Ach, to jest strasznie skomplikowane — jęknęła Ginewra. — Pozostało już tylko siedmiu pasowanych rycerzy. Większość z nich walcząc przeciw sobie, kończy remisem. Jednakże niektórzy zupełnie wyraźnie biją innych. Można liczyć na to, że Lancelot zwycięży Tristana, Tristan zwycięży Gareta i Lamoraka, Lamorak zwycięży Gowena i (daj Boże) Lancelota. Garet zwycięży Tora, Tor zwycięży Sir Kaya i Tristana — ciekawe, czy on jest rzeczywiście taki szlachetny. Kay ma przewagę nad Gowenem, zaś Gowen nad Garetem. Po prostu zwariować można. Oni są tacy dzielni pod pewnymi względami, lecz...

— „Jednakże oni są nieprzechodni" — zamruczał Merlin rysując schemat.

— „Ta włócznia od Tora do Tristana nie jest bardzo piękna, lecz nie o to chodzi. Gwen, odpocznij sobie chwilkę — tak skomplikowana sprawa wymaga, bym zapadł w trans".

Merlin usiadł i zamknął oczy. Lady Ginewra siedziała zupełnie nieruchomo pod przenikliwym spojrzeniem przyjaciółki Merlina — maleńkiej sowy, która uwiła sobie gniazdo w jego włosach.




Wreszcie starzec drgnął i usiadł prosto.

— „O Boże — westchnął — zawsze czuję się wyczerpany, gdy muszę odwiedzić choćby na krótko XX wiek. Tym niemniej znalazłem to, czego szukałem. Istnieje taka rzecz, która nazywa się... powiedzmy Teorią Turniejów. Nie będę męczył cię szczegółami. Oto, co powinnaś zrobić: połóż do urny parę kamieni, z których każdy oznacz kolorem rycerza. Oprócz tego — to bardzo ważne — rzuć odrobinę drobno roztartego rogu jednorożca. Kamieni przedstawiających Kaya i Gowena nie trzeba wrzucać do urny. Gdy zechcesz wybrać rycerza, potrząśnij urną,



zrób dwa koziołki, z tego jeden do tyłu, i wyjmij jeden kamień. Wówczas będziesz miała co najmniej równe szanse z Izoldą.

— O, to cudownie, Merlinie. W jaki sposób mam ci się odwdzięczyć? Powiedz, czego sobie życzysz?

— Hm, powiedział Merlin, sama wiesz, że dla mnie to drobnostka spełnić prawie każde z moich życzeń". Wymawiając te słowa podniósł do ust kawałek wędzonego łososia, który nagle pojawił się w jego ręku. Odgryzł kawałek i kontynuował: „Oczywiście mogłabyś zrobić dla mnie dodatkowo koziołka, gdy będziesz wychodzić przez drzwi. Chciałbym zobaczyć, jak zrobisz go bez mojej pomocy".

Jeśli oznaczyć przez zero remisy, zaś wygrane i przegrane Ginewry przez 1 i −1, to macierz wypłat będzie miała postać

| | *Izolda* 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ginewra* 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 |
| 2 | −1 | 0 | 1 | −1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | −1 | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | −1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | −1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 | −1 |
| 7 | 1 | −1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

W tej macierzy numery strategii oznaczają odpowiednich graczy.

Analiza tej gry jest prosta, lecz męcząca. Zbadawszy dokładnie grę 7 × 7 i gry 6 × 6, w niej zawarte, lub stosując metodę prób i błędów otrzymujecie wreszcie grę typu 5 × 5 opartą na strategiach 1, 2, 3, 4 i 7. Rozwiązanie tej gry 5 × 5 polega na wykorzystaniu z jednakową częstotliwością wszystkich pięciu rycerzy. To rozwiązanie spełnia także naszą pierwotną grę. Tak więc, obie damy powinny stosować następującą mieszaną strategię: wybierać rycerzy z względnymi częstotliwościami 1 : 1 : 1 :1 : : 0 : 0 : 1.

## Podsumowanie metod rozwiązywania gier $4 \times m$

Zróbmy teraz przegląd wiadomości z zakresu gier $4 \times 4$ i gier o większych rozmiarach. Nasza zwykła metoda polega przede wszystkim na poszukiwaniu punktu siodłowego. Jeśli istnieje, to wiemy, że nasza optymalna strategia polega na stosowaniu czystej strategii określonej przez punkt siodłowy. Jeśli zaś gra nie zawiera punktu siodłowego, to wyłączamy z macierzy wszystkie podporządkowane strategie Niebieskiego i wszystkie dominujące strategie Czerwonego. Niestety, nasze sprawdzenie na dominowanie sprowadza się do prostego obejrzenia, co w wielu wypadkach może prowadzić do błędu. W szczególności dotyczy to tych sytuacji, które nazwaliśmy przypadkami ukrytego dominowania, gdy pewna kombinacja czystych strategii dominuje nad jakąś jedną czystą strategią (lub jest podporządkowana tej czystej strategii). W każdym razie po oczyszczeniu macierzy w granicach naszych możliwości, wysuwamy próbną hipotezę, że wszystkie nasze strategie są aktywne, i próbujemy określić optymalną mieszaną strategię stosując prostą i pewną metodę. Istnieje dość duże prawdopodobieństwo, że dochodząc do końca znajdziemy się w tarapatach spowodowanych przez pułapki, które czyhają na naszej drodze.

W jaki sposób maskują się te trudności? Mają do swojej dyspozycji najróżniejsze kostiumy i cały zbiór fałszywych wąsów. Już uprzednio, przy grze $3 \times 3$ spotkaliśmy przypadek, gdy względne częstotliwości dla wszystkich strategii Niebieskiego były równe zeru, co musi być odpowiedzią nieprawdziwą. Odpowiedź może być prawidłowa, jeśli względne częstotliwości równe są zeru tylko dla niektórych strategii, lecz nie dla wszystkich strategii równocześnie. Bardzo użytecznym sprawdzeniem poprawności rozwiązania jest fakt, że suma względnych częstotliwości (przed skróceniem przez wspólny mnożnik) dla wszystkich strategii Niebieskiego powinna być równa sumie względnych częstotliwości dla wszystkich strategii Czerwonego. Jeśli nie są równe, to bądź metoda zawiodła, bądź popełniliśmy błędy arytmetyczne. Kłopoty mogą powstać i wówczas, gdy obliczamy średnią wypłatę

przy zastosowaniu optymalnych strategii przeciw każdej czystej strategii przeciwnika: może się okazać, że ktoś z graczy otrzymuje większą wygraną lub straci więcej niż powinien (zakładając, że obie strony grają poprawnie).

We wszystkich przypadkach, gdy pojawiają się kłopoty, a jesteśmy pewni, że obliczenia arytmetyczne wykonaliśmy poprawnie, metoda liczenia, jest taka sama i trzeba powiedzieć — nieprzyjemna: wyłączamy pewne strategie, rozwiązujemy otrzymaną skróconą grę i badamy to rozwiązanie dla pierwotnej gry. Jeśli gra jest bardzo duża, musimy działać ostrożnie, wezwawszy do pomocy całą naszą intuicję i łut szczęścia, albo spokojnie opuścić pole bitwy, ponieważ sytuacja może okazać się nie do opanowania, np. w takim przypadku, gdy istnieje ogromna ilość gier składowych oczekujących sprawdzenia.

Jeśli w pierwotnej grze, lub w tej, która pozostała po skróceniu macierzy na podstawie dominowania, jeden gracz ma więcej czystych strategii niż drugi, to nie trzeba niczego nowego. Obaj gracze powinni stosować optymalne strategie mieszane składające się z takiej ilości czystych strategii, która nie przewyższa ilości czystych strategii będących do dyspozycji tego gracza, który ma ich mniej. Stąd wniosek, że po to, aby zastosować metodę wszystkie-strategie-aktywne, trzeba wyłączyć taką ilość strategii z repertuaru gracza o większej ilości strategii, by gra miała macierz kwadratową. Na przykład, gra $5 \times 10$ musi być skrócona do gry typu $5 \times 5$, $4 \times 4$ lub nawet mniejszej. Ponieważ istnieje tu wiele różnych możliwości, procedura może okazać się tak męcząca, że odechce nam się szukać rozwiązania.

Kończąc te budujące wywody, pokrzepieni wiarą w dobrą wolę i Opatrzność, proponujemy teraz parę ćwiczeń:

**Ćwiczenia 5**

Określcie względne częstotliwości i cenę następujących gier:

**1**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 6 | 0 | 2 |
| 2 | 3 | 8 | 2 | 5 |
| 3 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| 4 | 3 | 0 | 1 | 3 |

**2**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 8 | 7 | 6 | 5 |
| 3 | 7 | 6 | 5 | 4 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

**3**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 4 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 4 |
| 4 | 0 | 5 | 2 | 2 |

**4**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | −1 | 1 | −2 |
| 3 | 1 | 3 | −1 | 4 | −1 |
| 4 | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 |

**5**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 5 | 4 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 4 | 2 | 2 | 2 |

**6**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 0 | 3 |
| 2 | 0 | 0 | 3 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 4 | 6 | 0 | 2 | 0 |

**7**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 0 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 3 | 4 | 8 |
| 3 | 1 | 5 | 9 | 2 |
| 4 | 3 | 6 | 3 | 1 |

**8**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 0 | 3 |
| 2 | 5 | 0 | 2 | 5 |
| 3 | 7 | 3 | 9 | 5 |
| 4 | 4 | 6 | 8 | 7 |

**9**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 3 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 5 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 7 | 3 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 7 |
| 6 | 0 | 0 | 2 | 0 |

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 6 | 0 | 0 |
| 2 | 7 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 5 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 0 | 8 | 5 | 0 | 0 | 4 | 1 |

*10*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 |

*11*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 4 | 4 | 8 |
| 2 | 8 | 0 | 6 | 8 | 7 |
| 3 | 1 | 5 | 9 | 5 | 2 |
| 4 | 3 | 6 | 3 | 1 | 1 |
| 5 | 5 | 5 | 0 | 3 | 0 |

*12*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 8 | 4 | 1 |
| 2 | 2 | 5 | 2 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 4 | 0 | 8 | 4 |
| 4 | 7 | −1 | 5 | 7 | 6 |
| 5 | 2 | 2 | 3 | 3 | 7 |

*13*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 7 | 7 | 6 | 7 |
| 2 | 6 | 6 | 6 | 9 | 2 |
| 3 | 9 | 4 | 5 | 5 | 9 |
| 4 | 4 | 9 | 3 | 8 | 6 |
| 5 | 7 | 7 | 9 | 3 | 6 |

*14*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 0 | 3 | 0 |
| 2 | 5 | 0 | 2 | 5 | 9 |
| 3 | 7 | 3 | 9 | 5 | 9 |
| 4 | 4 | 6 | 8 | 7 | 4 |
| 5 | 6 | 0 | 8 | 8 | 3 |

*15*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 5 | 1 | 3 |
| 2 | 0 | 0 | 4 | 3 | 4 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 6 |
| 4 | 5 | 4 | 5 | 0 | 5 |
| 5 | 3 | 1 | 1 | 6 | 6 |

*16*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 4 | 5 | 2 |
| 2 | 5 | 4 | 7 | 1 | 6 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 7 |
| 4 | 3 | 6 | 7 | 3 | 2 |
| 5 | 4 | 4 | 3 | 0 | 2 |

*17*

Czerwony

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 4 | 9 | 3 | 7 |
| 2 | 0 | 2 | 9 | 8 | 5 |
| 3 | 5 | 3 | 4 | 2 | 4 |
| 4 | 1 | 6 | 2 | 1 | 8 |
| 5 | 1 | 6 | 1 | 3 | 6 |

*18*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 4 | −2 | 4 | 0 | 5 |
| 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 3 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | −1 |
| 4 | 0 | 0 | 3 | −1 | 1 | 3 |
| 5 | 3 | 2 | 3 | −2 | 3 | −2 |
| 6 | 1 | −1 | −1 | 4 | 4 | −2 |

*19*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | 3 | 1 | −1 | −1 |
| 2 | −1 | −3 | 1 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 3 | −3 | −1 | 1 |
| 4 | 3 | −3 | 1 | −1 | 0 |

*20*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 3 | 1 | 3 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 6 | 6 | 0 | 0 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | 5 | 6 | 6 | 7 | 6 |
| 4 | 6 | 4 | 9 | 3 | 1 | 0 | 6 |
| 5 | 1 | 6 | 4 | 4 | 3 | 5 | 6 |
| 6 | 7 | 8 | 2 | 1 | 5 | 0 | 0 |

*21*

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 6 |
| 2 | 6 | 3 | 1 | 4 | 1 |
| 3 | 1 | 6 | 3 | 1 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 6 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 1 | 6 | 3 |

*22*

# 5

# Mieszanka firmowa

Ten rozdział przypomina dom towarowy. Zawiera sposoby i środki rozwiązywania gier i krótkie uwagi odnośnie takich zagadnień, których dokładniejsze rozpatrzenie wyprowadziłoby nas daleko poza granice zakreślone tej książce. Niektóre z tych zagadnień już przemykały się uprzednio jak zjawy; zdarzało się to zwykle wówczas, gdy nie mieliśmy czasu badać słabo oświetlone zakątki, by ujawniać wszystkie upiory.

Zaczniemy jednakże od zagadnienia, które jest w pewnym stopniu logicznym przedłużeniem ostatniego rozdziału, choć stanowi zupełne naruszenie przyjętych zasad.

## Przybliżenia

W poprzednich rozdziałach uporczywie dążyliśmy naprzód zagłębiając się w coraz bardziej skomplikowane gry. Wreszcie osiągnęliśmy punkt, w którym możemy stwierdzić, że wiemy, jak rozwiązywać gry dowolnej wielkości. Dokładniej — nauczyliśmy się metod przynoszących rozwiązanie, jeśli je stosować do gry, której strategie i wypłaty są zadane.

Teraz musimy wyciągnąć dalsze wnioski i przyznać, że ogólny stan rzeczy jest jednak opłakany. Nasze położe-



nie można by porównać z sytuacją urzędnika Ministerstwa Finansów, który postanowił spłacić deficyt budżetowy państwa banknotami jednodolarowymi. Obliczanie banknotów z szybkością — powiedzmy — jednego na sekundę jest operacją zupełnie realną i zrozumiałą. Lecz chcąc wypełnić swoje zadanie nasz urzędnik potrzebowałby 40 tysięcy lat (jeśli uwzględnić urlopy, zwolnienia chorobowe i 40-godzinny tydzień pracy). Gdy ilość strategii dostępnych dla każdego graczy leży w granicach od 4 do 10 (moment załamania zależy od potęgi naszej intuicji i sprzyjającego nam szczęścia) machina niezbędnych operacji rachunkowych staje się kolosalna. Na przykład, gra 10 × 10 zawiera ponad 40 tysiecy gier typu 4 × 4.

Ze względu na te trudności może się zdarzyć, że nawet zawodowiec z zakresu teorii gier zblednie, gdy otrzyma zadanie znalezienia dokładnego rozwiązania gier, których rząd leży między 10 × 10 i 100 × 100. Jego położenie jest istotnie straszne. Aby pokazać, do czego może dojść, wystarczy powiedzieć, że ilość gier niższego rzędu zawartych w grze typu 130 × 130 równa jest w przybliżeniu jedynce z 78 zerami, a to naprawdę imponująca liczba. Jest przysłowiową liczbą astronomiczną i odpowiada liczbie protonów istniejących we Wszechświecie zgodnie z obliczeniami Eddingtona.

Oczywiście, że żądamy zbyt wiele. Teoria naukowa nie powinna ograniczać się do stawiania nas przed nierozwiązalnymi zadaniami, a sprawdzenie wszystkich gier



składowych zawartych w dużej grze, jest po prostu niemożliwe. Dlatego potrzebujemy lepszej metody analizy, bądź też mniejszych wymagań w stosunku do rozwiązania. Ponieważ należymy do ludzi dygocących przed matematyką, wolimy to drugie wyjście. Sytuacja ulegnie poprawie, jeśli przymkniemy oko na dokładność rozwiązania i zadowolimy się rozwiązaniami przybliżonymi.

Konieczność takich kompromisów nie jest niczym nowym, a poza tym niewiele tracimy jeśli chodzi o praktyczną użyteczność naszych metod. Sytuację można porównać z położeniem człowieka, któremu dano długą deskę, piłę, calówkę i polecono odciąć pięć kawałków, które mogłyby utworzyć kwadrat z wzmocnieniem wzdłuż przekątnej, przy czym wszystkie odcinki powinny być dokładnie obliczone. Jeśli ten biedaczyna będzie matematykiem, to nigdy nie wykona tego zadania, ponieważ wzmocnienie po przekątnej powinno być dłuższe o pierwiastek z dwóch od boków kwadratu, zaś liczby tej nie ma na żadnej calówce. Jeśli jednak odrzuci swoją matematyczną togę i zaniecha dokładnego wymierzania długości odcinków, to odpiłuje takie kawałki, które zadowolą każdego rozsądnego zleceniodawcę.

Przystępując do rozważań na temat przybliżeń, musimy

duje się w trzeciej *kolumnie*. Przepiszmy tę kolumnę na prawo od macierzy i zaznaczmy *największą* liczbę, tj. 5*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 4 | * | 1 |
| 1 | 2 | 5 | 4 | | 5* |
| 2 | 3 | 4 | 1 | | 4 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 2 | 3 | 1* | 4 | | |

Ta 5* znajduje się *w drugim wierszu*. *Dodajmy* ten wiersz kratkami do wiersza napisanego pod macierzą i zaznaczmy gwiazdką *najmniejszą* liczbę, 3*, w nowym wierszu

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 4 | * | 1 |
| 1 | 2 | 5 | 4 | | 5* |
| 2 | 3 | 4 | 1 | | 4 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 2 | 3 | 1* | 4 | | |
| 3* | 5 | 6 | 8 | | |

Na tym kończy się drugi etap. Wszystko idzie gładko — więc nie zatrzymujmy się. Ponieważ liczba 3* znajduje się w pierwszej kolumnie, należy dodać tę kolumnę kratkami do kolumny znajdującej się na prawo od macierzy.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 4 | * | 1 | 3 |
| 1 | 2 | 5 | 4 | | 5* | 6* |
| 2 | 3 | 4 | 1 | | 4 | 6 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | | 2 | 6 |
| 2 | 3 | 1* | 4 | | | |
| 3* | 5 | 6 | 8 | | | |

Oznaczmy gwiazdką największą liczbę, 6*. (Tutaj parę liczb może uchodzić za największe; nie ma jednak żadnego znaczenia, która z nich ma być oznaczona.) Ponieważ liczba 6* znajduje się w drugim wierszu, dodajemy ten wiersz do wiersza znajdującego się na samym dole, i na tym kończymy trzeci etap, itd. Dla większej wprawy wykonujemy dziesięć takich etapów. (Uwaga — w ostatniej kolumnie największa liczba nie została oznaczona gwiazdką.)

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 4 | * | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 |
| 1 | 2 | 5 | 4 | | 5* | 6* | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | | 4 | 6 | 8 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22* | 25* | 28 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | | 2 | 6 | 10* | 14* | 16* | 18* | 20* | 22 | 24 | 26 |
| 2 | 3 | 1* | 4 | | | | | | | | | | | |
| 3* | 5 | 6 | 8 | | | | | | | | | | | |
| 4* | 7 | 11 | 12 | | | | | | | | | | | |
| 8* | 9 | 13 | 14 | | | | | | | | | | | |
| 12 | 11* | 15 | 16 | | | | | | | | | | | |
| 16 | 13* | 17 | 18 | | | | | | | | | | | |
| 20 | 15* | 19 | 20 | | | | | | | | | | | |
| 24 | 17* | 21 | 22 | | | | | | | | | | | |
| 26 | 20* | 25 | 23 | | | | | | | | | | | |
| 28 | 23* | 29 | 24 | | | | | | | | | | | |

W tym momencie nasuwa się słuszne pytanie: no i co dalej? Wykonaliśmy czysto mechaniczną pracę, którą może wykonać dziecko, lecz do tej chwili nie mamy pojęcia, jaki jest jej cel. Zróbmy jednak jeszcze jeden krok dalej. Obliczmy ilość gwiazdek w każdym wierszu i w każdej kolumnie i napiszmy te liczby obok macierzy.

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 4 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 5 | 4 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 5 |
| Częstotliwości Czerw. | 3 | 6 | 1 | 0 | |

Te właśnie liczby są przybliżonymi wartościami względnych częstotliwości — zgodnie z którymi Niebieski i Czerwony powinni mieszać swoje strategie — tj. 1 : 2 : 2 : 5 i 3 : 6 : 1 : 0.

Jaka jest dokładność tych wyników? Ocenimy ją sprawdzając, jakie nieszczęścia przydarzą się graczom stosującym te strategie. Rozpatrując naszą tablicę widzimy z ostatniego wiersza, że najmniejsza wygrana Niebieskiego w ciągu 10 partii może być 23, jeśli Czerwony stale stosuje drugą strategię. Dlatego średnia wygrana Niebieskiego przypadająca na jedną partię może wynosić za-

ledwie 2, 3. Podobnie rozpatrując ostatnią kolumnę z prawej widzimy, że mieszana strategia Czerwonego może kosztować go aż 28 w ciągu dziesięciu partii, czyli średnio po 2,8 na jedną partię (jeśli Niebieski stosuje za każdym razem strategię Niebieski 3).

Rozbieżność między liczbami 2,3 i 2,8 świadczy o niedoskonałości zastosowanych strategii mieszanych. Gdyby stosowano optymalne strategie, każdy z graczy zagwarantowałby dla siebie średnią wygraną lub przegraną równą jakiejś liczbie leżącej między 2,3 i 2,8.

Zakres niepewności między 2,3 i 2,8 równa się ok. 20% wielkości wypłat, a więc raczej dużo. Moglibyśmy znaleźć lepsze strategie, gdybyśmy zwiększyli liczbę etapów z 10 do 20 (jak niżej).

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 4 | 25 | 29* | 32* | 35* | 38* | 39 | 41 | 43 | 45 | 49 | 53 |
| 1 | 2 | 5 | 4 | 20 | 24 | 26 | 28 | 30 | 35 | 36 | 37 | 38 | 42 | 46 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 28* | 29 | 32 | 35 | 38 | 42* | 44* | 46* | 48* | 49 | 50 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 40 | 44 | 48 | 50* | 52 |
| 28 | 23 | 29 | 24 | | | | | | | | | | | |
| 30 | 26 | 33 | 25* | | | | | | | | | | | |
| 32 | 29* | 34 | 29 | | | | | | | | | | | |
| 34 | 32* | 35 | 33 | | | | | | | | | | | |
| 36 | 35* | 36 | 37 | | | | | | | | | | | |
| 38 | 38 | 37* | 41 | | | | | | | | | | | |
| 40* | 41 | 41 | 42 | | | | | | | | | | | |
| 42* | 44 | 45 | 43 | | | | | | | | | | | |
| 44* | 47 | 49 | 44 | | | | | | | | | | | |
| 46 | 50 | 53 | 45* | | | | | | | | | | | |
| 50 | 52 | 55 | 47* | | | | | | | | | | | |

Mieszane strategie Niebieskiego i Czerwonego będą równe odpowiednio 5 : 2 : 7 : 6 i 6 : 9 : 2 : 3, zaś średnie wygrane i przegrane będą teraz ograniczone zakresem od $^{47}/_{20}$ do $^{53}/_{20}$, tj. od 2,35 do 2,65. Tak więc niedokładność wypłaty zmniejszyła się z ok. 20% do ok. 12%.

Ten wynik jest już niezły. Jeśli jesteście innego zdania, proces można kontynuować w nieskończoność. W miarę wzrastania częstotliwości będziemy obserwowali fluktuację gwarantowanej wypłaty, lecz wyliczane wartości będą coraz bliższe prawdziwej ceny gry.

Dokładne rozwiązanie naszej gry jest 8 : 3 : 7 : 9 dla

Niebieskiego i 5 : 7 : 3 : 3 dla Czerwonego, zaś cena gry (na korzyść Niebieskiego) wynosi $2^{5}/_{9}$.

Tak więc, jeśli macierz wypłat składa się z niewielkich liczb całkowitych, to nasza metoda pozwala odważnie spojrzeć w oczy grom 10 × 10, a nawet większym, ponieważ wystarczą nam skromne ilości papieru, ołówek i trochę czasu.

## Jeszcze o dominowaniu

Zagadnienie dominowania było zaledwie naszkicowane w poprzednich rozdziałach, aby nie burzyć ogólnej linii rozumowania. Ponieważ niebezpieczeństwo już minęło, możemy pozwolić sobie na usunięcie białych plam. Celem uniknięcia męczących powtórzeń będziemy rozpatrywali wszystkie zagadnienia z pozycji Niebieskiego, wierząc, że Czytelnik sam wprowadzi niezbędne zmiany, gdy rozumowanie będzie dotyczyć Czerwonego.

Nauczyliśmy się natychmiast wyłączać każdą strategię, która podporządkowana jest innej. Jeśli więc wypłaty w jednym wierszu są mniejsze od odpowiednich wypłat w drugim wierszu, to ten pierwszy wiersz opuszczamy. Możemy postępować tak nawet wówczas, gdy niektóre z odpowiednich wypłat są jednakowe. Jeśli wszystkie wypłaty są mniejsze, to sytuację nazywamy *silnym* dominowaniem; jeśli zaś niektóre z wypłat są jednakowe — *słabym* dominowaniem. Przyczyna, dla której należy rozróżniać te sytuacje i stroić w osobne nazwy, jest następująca: wyłączenie jakiegoś wiersza na podstawie słabego dominowania może spowodować takie niezauważalne zmiany w grze, w rezultacie których nowa gra będzie miała mniej rozwiązań niż stara. Ponieważ ograniczaliśmy się wyłącznie do znalezienia jednego rozwiązania, a nie wszystkich, to nie musieliśmy rozróżniać typów dominowania.

Uprzednio wspominaliśmy także, że pewna szczęśliwa kombinacja wierszy może dominować nad jakimś pojedynczym wierszem. Tak np. w grze:

| | | Czerwony | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Niebieski | 1 | 2 | 3 | 7 | 0 | 2 |
| | 2 | 3 | 5 | 7 | 1 | 1 |
| | 3 | 2 | 2 | 7 | 2 | 4 |

strategia Niebieski 1 z wagą 2 (tj. pomnożona przez 2) jest podporządkowana mieszaninie strategii Niebieski 2 i Niebieski 3 z wagami 1.

Następnie, jeśli jakiś wiersz dominuje nad mieszaniną innych wierszy wykorzystujących tę samą ilość części lub częstotliwości, wówczas wiersz ten może być opuszczony.

Nie ma elementarnych reguł rozpoznawania podobnych sytuacji, zwykle nie rzucających się w oczy. Nie ma rozsądnych podstaw, by sądzić, że podobne proste reguły istnieją: naprawdę zadanie to jest dokładnie tak samo skomplikowane, jak znalezienie optymalnej mieszanej strategii. Tym niemniej zawsze warto poświęcić chwilę uwagi, by znaleźć taką sytuację. Tak np. w przykładzie szesnastym o spadkobiercy (s. 117) łatwo zauważyć, że wiersz 1 jest podporządkowany kombinacji wierszy 2 i 3 wziętych z częstotliwościami $1/2 : 1/2$; dlatego powinien być opuszczony.

Rozpatrzmy jeszcze ostatni typ dominowania — dominowanie macierzowe — bliskie duchem idei punktów siodłowych. Stanowi ono w istocie uogólnienie pojęcia punktu siodłowego. Oto następujący, przykry dla oka obiekt:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 4 | 6 |
| 2 | 0 | 3 | 3 | 4 |
| 3 | 1 | 3 | 5 | 4 |
| −1 | −1 | 6 | −1 | 2 |
| 0 | −4 | 0 | 3 | 4 |
| 2 | −1 | 10 | 1 | 2 |
| −3 | 0 | 3 | 1 | 5 |

Istnieje ważna przyczyna ku temu, aby rozdzielić to-to na cztery macierze składowe

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 4 | 6 |
| 2 | 0 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 5 | 4 |
| −1 | −1 | | | |
| 0 | −4 | | | |
| 2 | −1 | | | |
| −3 | 0 | | | |

Zakreskowana macierz posiada bardzo ważną cechę: *Każda* kolumna na prawo dominuje nad *którąś* kolumną w zakreskowanej macierzy, zaś każdy wiersz poniżej tej macierzy podporządkowany jest któremuś wierszowi zakreskowanej macierzy. Liczby znajdujące się w kratkach pozostałej części macierzy nie grają żadnej roli, jeśli zakreskowana macierz posiada wymienione powyżej własności. Jeśli zakreskowana macierz posiada wymienione własności, to dokładna wielkość wszystkich pozostałych elementów macierzy traci już znaczenie, cała gra zaś sprowadza się do zakreskowanej macierzy

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |

Tak więc nasze odkrycie warte było zachodu. Poszukując podobnych sytuacji pamiętajmy, że możemy swobodnie zamieniać miejscami dowolne wiersze i dowolne kolumny. Chociaż warto znać tę sztuczkę, to nie często kończy się ona *happy endem.* Nieraz trzeba porzucić zwykłe zajęcia i żyć tylko badaniem jakiejś ogromnej macierzy, dopóki nie uśmiechnie się szczęście — jeśli się uśmiechnie.

## Rozwiązania proste

Powstrzymywaliśmy się raczej przed podawaniem reguł, które odnoszą się tylko do bardzo specjalnych typów gier. Jeśli jednak teraz, na tak zaawansowanym etapie

wprowadzimy jedną czy dwie takie reguły, to nie wywołamy tym już nieporządku.

Mówi się, że gra posiada rozwiązanie proste, jeśli każdy z graczy może bezkarnie stosować dowolną czystą strategię przeciw optymalnej mieszanej strategii przeciwnika. Szczególnym przypadkiem gier podobnego typu jest gra, w której optymalne mieszane strategie obu graczy zawierają ich wszystkie czyste strategie. Dla sprawdzenia strategii, o której zakłada się, że jest optymalna, należy oczywiście zastosować regułę bezkarności. Idea prostego rozwiązania jest nawet bardziej ogólna niż pojęcie aktywności wszystkich czystych strategii, ponieważ zawiera w sobie także pewne gry z czystymi strategiami, które „grają" z zerowymi częstotliwościami. Na przykład, w grze 4 × 4 Niebieski może zastosować dowolną czystą strategię przeciw mieszanej strategii Czerwonego, jeśli mieszane strategie obu graczy są odpowiednio 3 : 2 : 1 : 7 i 1 : 5 : 2 : 4. Może on postąpić tak samo, jeśli mieszane strategie są 3 : 0 : 1 : 7 i 1 : 5 : 0 : 0, pod warunkiem że gra ma naprawdę rozwiązanie proste.

Dla przykładu poniższa gra posiada rozwiązanie proste, ponieważ każdy gracz może stosować dowolną czystą strategię przeciw optymalnej mieszanej strategii drugiego gracza.

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | Częstotliwości Nieb. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | −10 | 3 | 0 |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 1 |
| 3 | 2 | 11 | 5 | 0 |
| Częstotliwości Czerw. | 1 | 0 | 2 | |

Średnia wypłata zawsze będzie równa 4.

W zasadzie nie mamy murowanego sposobu, który pozwoliłby z góry poznać, czy gra posiada rozwiązanie proste. Istnieją jednak takie wypadki. Oto jeden z nich.

Suma wypłat w poszczególnych wierszach jest identyczna; podobnie jest z sumami każdej kolumny. Tak w

| | | *Czerwony* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Niebieski* | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 |
| | 2 | −2 | 4 | 2 | 4 |
| | 3 | 7 | −2 | 2 | 1 |

suma każdego wiersza równa się 8, a każdej kolumny — 6. W grach takich typów istnieje proste rozwiązanie i łatwo je znaleźć. Jest to gra, w której wszystkie czyste strategie są aktywne i stosowane są z identycznymi częstotliwościami. Rzeczywiście, 1 : 1 : 1 dla Niebieskiego i 1 : 1 : 1 : 1 dla Czerwonego tworzą rozwiązanie. Cenę gry otrzymujemy rozdzieliwszy sumę elementów kolumny przez liczbę strategii Niebieskiego lub sumę elementów wiersza przez liczbę strategii Czerwonego; tzn. w naszym przypadku $^6/_3$ i $^8/_4$.

Istnieje jeszcze jedna klasa gier z prostym rozwiązaniem, które możemy rozpoznać; wymaga to jednak wysiłku zarówno autora, jak i Czytelnika. Musimy zrozumieć znaczenie pojęć *przekątna i przekątna oddzielająca.*

Przekątne macierzy, takiej np. jak

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 2 | 8 |
| 9 | 2 | 3 | 0 |
| 0 | 7 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 6 | 2 |

można określić, jeśli przepisać tę samą macierz jeszcze raz pod pierwszą i następnie wykreślić pochylone proste w sposób pokazany poniżej

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 2 | 8 |
| 9 | 2 | 3 | 0 |
| 0 | 7 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 6 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 2 | 8 |
| 9 | 2 | 3 | 0 |
| 0 | 7 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 6 | 2 |

(Jeśli zrozumieliście, na czym to polega, to nie trzeba za każdym razem dublować macierzy).

Przekątna nazywa się *oddzielająca* od pozostałej macierzy, jeśli składa się wyłącznie z samych dużych liczb: jej najmniejszy element powinien co najmniej równać się największemu elementowi pozostałej części macierzy.

Potrzebna nam będzie także magiczna liczba (nazwijmy ją $M$), którą otrzymujemy przez przemnożenie liczby wierszy macierzy przez największą liczbę pozostałą w macierzy po usunięciu z niej przekątnych oddzielających. Teraz możemy już przystąpić do opisu tego typu gier z prostym rozwiązaniem.

Jeśli macierz zawiera przekątną oddzielającą i jeśli suma wypłat każdego wiersza lub każdej kolumny jest nie mniejsza od magicznej liczby $M$, to — Boże dopomóż — gra ma proste rozwiązanie.

W naszym przykładzie przekątna 9-7-6-8 jest oddzielająca. Liczba wierszy równa jest 4, a największa pozostała wypłata 3. Dlatego $M = 4 \times 3 = 12$. Sumy elementów wierszy i kolumn równe są 13, 14, 12, 13, i 14, 12, 13, 13. Wszystkie one (i to zarówno dla wierszy, jak i dla kolumn, tj. nawet więcej niż potrzebujemy) są co najmniej równe liczbie $M = 12$. Dlatego gra posiada rozwiązanie proste. Łatwe, prawda?

## Mnogie rozwiązania

Chociaż dotychczasowe zainteresowania dotyczyły wyłącznie problemu określenia jakiegoś jednego rozwiązania gry, to nieraz było jasne, że gry mogą mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

Sytuacja grozi w pewnym sensie eksplozją: każda gra posiada bądź dokładnie jedno rozwiązanie, bądź też ma ich nieskończenie wiele. Do tej chwili nie udowadnialiśmy wielu przytaczanych w tej książce twierdzeń, lecz dowód ostatniego twierdzenia jest tak prosty, że nie możemy powstrzymać się, by go nie przytoczyć. Załóżmy, że gra ma co najmniej dwa rozwiązania (tj. dwie optymalne strategie). Wówczas rozwiązania te mogą być mieszane

z dowolnymi częstotliwościami względnymi, a takich częstotliwości może być nieskończenie wiele.

Można by sądzić, że określanie ilości rozwiązań nie jest zbyt ciekawym zajęciem. Przypomina trochę sprawdzanie prochu: bądź jest zupełnie nieaktywny, bądź wybucha. Tym niemniej można rozpatrywać zadanie tak, że będzie miało więcej sensu; każda gra posiada tylko skończoną liczbę rozwiązań *podstawowych*.

Rozwiązania podstawowe można określić w sposób następujący: jeśli kwadratowa podmacierz gry (tzn. gra składowa) posiada dokładnie jedno rozwiązanie proste — to jest takie, przeciw któremu drugi gracz może stosować dowolną czystą strategię nie ponosząc przy tym dodatkowych strat — i jeśli to proste rozwiązanie spełnia także grę wyjściową, wówczas nazywamy je rozwiązaniem podstawowym. Gra posiada tylko skończoną ilość kwadratowych podmacierzy (z których część tylko posiada rozwiązania proste). Dlatego ogólna ilość podstawowych rozwiązań też musi być skończoną liczbą. Pełną ilość rozwiązań można otrzymać w rezultacie mieszania na wszystkie możliwe sposoby rozwiązań podstawowych.

A oto przykład:

| *Niebieski* \ *Czerwony* | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 6 | 0 |
| 2 | 5 | 3 | 6 |
| 3 | 4 | 4 | 3 |

W tej grze nie ma punktów siodłowych (nawiasem mówiąc są one rozwiązaniami podstawowymi). Spośród dziewięciu podmacierzy 2 × 2 tylko dwie

| | |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 5 | 3 |

| | |
|---|---|
| 6 | 0 |
| 3 | 6 |

zawierają rozwiązania ze wszystkimi strategiami aktywnymi (a więc proste), spełniające pierwotną grę. Tymi rozwiązaniami są dla Niebieskiego miks 2 : 4 : 0 przeciw Czerwonemu 3 : 3 : 0 i Niebieski 3 : 6 : 0 przeciw Czerwonemu 0 : 6 : 3 (dla wygodniejszego sprawdzenia, liczb

tych nie skrócono przez wspólny czynnik). Macierz 3 × 3 także posiada proste rozwiązanie i ponieważ ta macierz jest właśnie grą wyjściową, to rozwiązanie to jest podstawowe. Jednak — jak się okazuje — jest ono identyczne z jednym ze znalezionych już rozwiązań, a mianowicie z pierwszym. Dlatego gra posiada tylko dwa różne podstawowe rozwiązania, które po skróceniu przez wspólne czynniki można przedstawić w następującej postaci:

Niebieski 1 : 2 : 0 przeciw Czerwonemu 1 : 1 : 0 i Niebieski 1 : 2 : 0 przeciw Czerwonemu 0 : 2 : 1. Tak więc, Niebieski posiada tylko jedną optymalną strategię, mianowicie 1 : 2 : 0, gdy Czerwony może stosować strategie 1 : 1 : 0 lub 0 : 2 : 1 *lub ich dowolną kombinację*. Jeśli, na przykład, pierwszej podstawowej strategii przypisać wagę 3, zaś drugiej — powiedzmy — wagę 5, to otrzymamy strategie 3 : 3 : 0 i 0 : 10 : 5, których kombinacja da z kolei świetną strategię 3 : 13 : 5.

Zagorzały miłośnik teorii gier nie będzie mógł powstrzymać się przed szukaniem podstawowych rozwiązań dla przytoczonej poniżej gry. Niebieski ma ich pięć, a Czerwony jedno (wymieniono je na końcu książki).

**Ćwiczenie 6**

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | −8 | 9 | −3 |
| 2 | −20 | 4 | 9 | −3 |
| 3 | 25 | 1 | 18 | −6 |
| 4 | −11 | 13 | −18 | 6 |

## O mierzeniu

Trudnością, do której użytkownik teorii gier musi się przyzwyczaić, jest konieczność mierzenia rzeczy nie poddających się ścisłemu pomiarowi. Jest to trudność poważna; nie wolno jej lekceważyć. Z drugiej strony,

prawie równie łatwo nadawać jej zbyt dużo wagi, jeśli nie doceni się sposobu, w jaki pomiary określają wybór strategii i przebieg gier. Rozpatrzmy nieco szerzej poglądy dotyczące tej sprawy.

Z dyskusji nad dominowaniem wynika wyraźnie, że mogą powstać sytuacje, nie wymagające dokładnych pomiarów. Nieraz na podstawie jakościowego porównania można ustalić, że jakiś wiersz, kolumna lub podmacierz są dominujące, choć elementy wyłączone na zasadzie dominowania z trudem poddają się mierzeniu. W końcu po to, aby określić wysokość najwyższego drzewa w lesie, nie musimy mierzyć wszystkich drzew.

Zwracaliśmy już uwagę na początku książki, że dodanie stałej liczby do każdego elementu macierzy nie ma żadnego wpływu na optymalną strategię gracza. Dlatego, jeśli macierz składa się z czterech liczb — np. 1, 7, 11 i 1066 — to nie będziemy grali gorzej zmniejszywszy każdą wypłatę o 533 i kierując się następującymi wypłatami: — 532, — 526, — 522 i 533. Zwracaliśmy także uwagę, że gra nie ulega zmianie, jeśli wszystkie wypłaty zostają pomnożone przez dowolną stałą liczbę dodatnią. Dla przykładu: mnożąc wszystkie liczby naszej macierzy przez $1/13$, otrzymamy zapłaty $-40\,12/13$, $-40\,6/13$, $-40\,2/13$ i 41. Taki proces dodawania stałych liczb i mnożenia przez stałe liczby można kontynuować w dowolnym porządku. Możemy więc śmiało dodać do wszystkich wypłat ostatniej macierzy liczbę 40 i być przy tym przekonanym, że np. gry

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 1 |
| 11 | 1 | 1066 |
| 1066 | 1 | 7 |

*i*

| | | |
|---|---|---|
| $-12/13$ | $-6/13$ | $-12/13$ |
| $-2/13$ | $-12/13$ | 81 |
| 81 | $-12/13$ | $-6/13$ |

są zupełnie identyczne z punktu widzenia wyboru strategii.

Teraz jest już jasne, że niezależność strategii od dodania stałych liczb i od pomnożenia przez stałe liczby może w pewnym stopniu złagodzić nasze trudności związane z dokładnością pomiaru. Ten czynnik można ocenić,

jeśli rozpatrzyć macierz, w której istnieją trzy różne wartości wypłat. W tym wypadku jest zupełnie nieważne, jakie wartości ma najmniejsza i największa wypłata. Jedyne, co ma znaczenie, to względna pozycja trzeciej wypłaty.

Przy okazji: istnieje jeden ważny czynnik, który zależy od działań nie mających żadnego wpływu na wybór strategii. Jest nim cena gry. Warto czasem wiedzieć, iż cena gry równa jest 20 zamiast 10, lub 10 zamiast 20. W praktyce może to wpłynąć na decyzję gracza, czy zasiąść do gry, czy też nie. Lecz do wygranej prowadzi jedna i ta sama optymalna strategia niezależnie od sumy do wygrania.

Zakres, w którym strategie są wrażliwe na błędy pomiarów, można rozpatrywać jako obszar pośredni między skrajnymi wartościami wypłat, ponieważ położenie tych skrajnych wartości można dowolnie przesuwać bez szkody dla gry, pod warunkiem że wartości pośrednie także będą odpowiednio przesunięte. Aby zdobyć nieco doświadczenia o wzajemnym powiązaniu błędów pomiaru, strategii i ceny gry, wykonamy niewielki eksperyment.

Rozpoczniemy od typowej gry 3 × 3

| | | *Czerwony* 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* | 1 | 6 | 2 | 0 |
| | 2 | 4 | 8 | 4 |
| | 3 | 3 | 3 | 10 |

Wypłaty mieszczą się w granicach od 0 do 10; w dalszym ciągu ograniczymy wszystkie gry do tego zakresu. Wyłączymy w ten sposób wpływ zmiany skali na cenę gry — w rezultacie dodania stałej wielkości lub pomnożenia przez stałą wielkość. Będziemy teraz naśladować błędy pomiarów poprzez niezależną zmianę każdego elementu macierzy: dodajmy w sposób losowy liczby − 1, 0 lub + 1, naśladując w ten sposób przypadkowe jednakowo prawdopodobne błędy. Robimy jeden wyjątek w tym prawie:

nigdy nie zmieniamy skrajnych wartości (0 i 10) i odrzucamy wszystkie zmiany prowadzące do wypłat wychodzących poza granice tych skrajnych wartości; wszystko to po to, by zachować pierwotną skalę (od 0 do 10). Zastosowanie tablicy liczb przypadkowych przekształca naszą grę w macierz

| | | *Czerwony* 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* | 1 | 7 | 2 | 0 |
| | 2 | 4 | 7 | 5 |
| | 3 | 2 | 4 | 10 |

Proces ten można oczywiście kontynuować; otrzymaną macierz jeszcze raz poddać działaniom błędu przypadkowego i otrzymać nową macierz. Ta z kolei byłaby chyba mniej podobna do wyjściowej niż druga macierz itd. Można też rozpatrywać trzecią macierz jako właściwą, zaś pierwotną macierz jako otrzymaną z niej w rezultacie dwukrotnego odziaływania błędów przypadkowych. To ostatnie założenie okaże się w dalszym ciągu wygodniejsze.

Interesuje nas teraz następujący problem: załóżmy, że wydaje nam się, iż bierzemy udział w jednej z gier, np. w pierwszej, gdy w istocie gramy w trzecią lub drugą grę; czym grozi taki błąd? Rozpatrzmy to z punktu widzenia Niebieskiego.

Druga gra (gra prawdziwa) wymaga, aby Niebieski zastosował swoje trzy czyste strategie ze względnymi częstotliwościami 22 : 26 : 16, co daje mu cenę gry: $4\,{}^{17}/_{32}$. Lecz Niebieski posługując się błędną pierwszą macierzą uważa, że powinien zastosować miks 7 : 7 : 6 i tak postępuje. Skutki będą zależały od tego, co zrobi Czerwony. Jeśli stosuje kolejno swoją pierwszą, drugą i trzecią czystą strategię, to Niebieski wygra odpowiednio $4\,{}^{0}/_{20}$, $4\,{}^{7}/_{20}$ i $4\,{}^{15}/_{20}$. Najgorsze, co go może spotkać, to że wygra on 4, czyli o 0,18 mniej niż $4\,{}^{17}/_{32}$, które mógłby wygrać, gdyby znał prawdziwą macierz.

Nasz eksperyment polega na tym, że poddajemy pierw-

szą macierz oddziaływaniu przypadkowych błędów kolejno 14 razy:

*1*

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 2 | 0 |
| 4 | 8 | 4 |
| 3 | 3 | 10 |

*2*

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 2 | 0 |
| 4 | 7 | 5 |
| 2 | 4 | 10 |

*3*

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 2 | 0 |
| 3 | 6 | 4 |
| 1 | 3 | 10 |

*4*

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 1 | 0 |
| 4 | 7 | 3 |
| 0 | 4 | 10 |

*5*

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 2 | 0 |
| 3 | 7 | 3 |
| 1 | 5 | 10 |

*6*

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 3 | 0 |
| 3 | 7 | 4 |
| 1 | 4 | 10 |

*7*

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 0 |
| 3 | 7 | 3 |
| 2 | 5 | 10 |

*8*

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 0 |
| 2 | 8 | 4 |
| 2 | 4 | 10 |

*9*

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 0 |
| 1 | 8 | 4 |
| 3 | 3 | 10 |

*10*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 |
| 1 | 8 | 4 |
| 3 | 4 | 10 |

*11*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 8 | 4 |
| 2 | 5 | 10 |

*12*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 |
| 0 | 8 | 3 |
| 1 | 4 | 10 |

*13*

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 0 |
| 1 | 8 | 4 |
| 2 | 5 | 10 |

*14*

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 |
| 1 | 7 | 3 |
| 1 | 5 | 10 |

*15*

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 0 |
| 2 | 7 | 4 |
| 0 | 4 | 10 |

Będziemy rozpatrywali teraz każdą z dziesięciu ostatnich gier jako prawdziwą, w stosunku do pięciu poprzedzających ją.

Optymalne strategie dla tych gier są następujące:

| Gra | Niebieski | Czerwony | Cena |
|---|---|---|---|
| 1 | 7:7:6 | 14:2:4 | $4\frac{2}{5}$ |
| 2 | 22:26:16 | 40:5:19 | $4\frac{17}{32}$ |
| 3 | 25:24:14 | 36:10:17 | $3\frac{47}{63}$ |
| 4 | 34:32:27 | 51:9:33 | $3\frac{29}{31}$ |
| 5 | 36:12:24 | 41:15:16 | $3\frac{5}{6}$ |
| 6 | 33:3:18 | 36:4:14 | $3\frac{5}{9}$ |
| 7 | 4:0:2 | 5:0:1 | $3\frac{1}{3}$ |
| 8 | 8:0:3 | 10:0:1 | $2\frac{8}{11}$ |
| 9 | 0:0:1 | 1:0:0 | 3 |
| 10 | 0:0:1 | 1:0:0 | 3 |
| 11 | 0:0:1 | 1:0:0 | 2 |
| 12 | 0:0:1 | 1:0:0 | 1 |
| 13 | 0:0:1 | 1:0:0 | 2 |
| 14 | 0:0:1 | 2:0:0 | 1 |
| 15 | 0:1:0 | 1:0:0 | 2 |

Wspólne czynniki nie zostały wyłączone, a więc sumy względnych częstotliwości Niebieskiego i Czerwonego są jednakowe.

Dzięki tej informacji obliczenia stają się łatwe.

*Średnia strata Niebieskiego.*

*Grę poddano następującej liczbie zmian przypadkowych:*

| *Strategia Niebieskiego oparta na grze nr* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,18 | 0,30 | 0,09 | 0,38 | 0,46 |
| 2 | 0,21 | 0,22 | 0,30 | 0,37 | 0,24 |
| 3 | 0,57 | 0,47 | 0,21 | 0,16 | 0,33 |
| 4 | 0,32 | 0,41 | 0,26 | 0,36 | 1,05 |
| 5 | 0,22 | 0,17 | 0,23 | 0,83 | 1,33 |
| 6 | 0,06 | 0,12 | 0,72 | 1,33 | 0,72 |
| 7 | 0,06 | 0,67 | 1,33 | 0,67 | 0,00 |
| 8 | 0,73 | 1,45 | 0,73 | 0,00 | 1,45 |
| 9 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 10 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 2,00 |

Powyższa tablica pokazuje, o ile może zmniejszyć się (może, ale nie musi) wygrana Niebieskiego w porównaniu z ceną gry, jeśli jego strategia opiera się na pewnej macierzy a gra przebiega na podstawie innej macierzy.

Różnica ta powinna wzrastać w miarę przesuwania się na prawo w rezultacie wzrostu błędów macierzy. Założenie to potwierdza się, ponieważ średnia wartość różnicy dla pięciu kolumn równa jest odpowiednio 0,24; 0,38; 0,39; 0,41 i 0,76.

Morał z tego eksperymentu: pewne przypadkowe błędy w macierzy, chociaż nie są oczywiście pożądane, nie muszą jednak prowadzić do katastrofy. Mniej więcej w połowie przypadków największa możliwa strata jest mniejsza niż 0,30, w grach, których cena wynosi okrągło 3,00, do 4,00; tj. w przybliżeniu 10%.

Całość sytuacji sugeruje — w każdym razie autorowi — że istnieją podstawy, by mieć nadzieję, iż teoria gier może dać ważkie rezultaty nawet w tych dziedzinach, w których pomiary są nieco utrudnione.

## Wypłaty jakościowe

Jakościowa ocena wypłat jest naturalną kontynuacją zagadnienia, o którym była mowa.

Istnieje bardzo słaba forma pomiaru, nazywana uporządkowaniem. Polega ona po prostu na rozłożeniu wypłat w kolejności tak, jak uszeregowalibyśmy zależnie od stopnia nagrzania kawałek lodu, rozżarzoną do białości sztabę metalu, filiżankę kawy, naszą krew i słońce.

Jeśli nie jesteśmy w stanie ilościowo ocenić interesujących nas wypłat, lecz możemy ułożyć je w kolejności, to jeszcze nie wszystko jest stracone. W grach istnieją sytuacje, nie wymagające niczego poza określeniem kolejności wypłat; istnieją także takie gry, w których znajomość kolejności wypłat pozwala wysunąć częściowe wnioski co do optymalnych strategii i ceny gry.

Załóżmy, że mamy rozwiązać grę, w której wypłaty nie są znane, lecz które możemy ocenić jako złe (*z*), dostateczne (*ds*), dobre (*d*) i bardzo dobre (*bd*). Wyraźmy tę grę w danych liczbowych. Rozpoczniemy od sprawdzenia gry na istnienie punktu siodłowego

| Niebieski \ Czerwony | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *z* | *ds* | *d* | *bd* | *d* | *z* |
| 2 | *ds* | *ds* | *d* | *d* | *bd* | *ds** |
| 3 | *z* | *bd* | *bd* | *bd* | *ds* | *z* |
| 4 | *ds* | *bd* | *ds* | *z* | *z* | *z* |
| Kolumny Max | *ds** | *bd* | *bd* | *bd* | *bd* | |

W tej grze największa wartość minimów wierszy (czyli maksimin) i największa wartość maksimów kolumn (czyli minimaks) są równe. Dlatego Niebieski powinien stosować swoją drugą czystą strategię, Czerwony zaś swoją pierwszą czystą strategię. Cena gry dla Niebieskiego — dostatecznie.

Rozwiązaliśmy zatem grę całkowicie. Mieliśmy oczywiście szczęście, ale to nikogo nie kompromituje.

Istnieje sprzężenie zwrotne między grami tego typu a zagadnieniem rozpatrywanym w poprzednim paragrafie, a mianowicie: dokładność pomiarów wypłat. Związek ten rozpatrzymy w najogólniejszej postaci. Załóżmy, że gra posiada punkt siodłowy w kratce oznaczonej gwiazdką:

Czerwony

Niebieski

W danym przypadku nie ma znaczenia, gdzie znajduje się kratka i jaka jest wielkość macierzy.

Zgodnie z definicją punktu siodłowego gwiazdka oznacza największą liczbę w danej kolumne. Od razu widać, że wszystkie liczby w tej kolumnie mogą ulec jakiejkolwiek chorobie i nie zmieni się rezultat, jednak pod warunkiem że liczba oznaczona gwiazdką pozostanie największa.

Gwiazdka oznacza najmniejszą liczbę także w tym wierszu, w którym się znajduje. Pozostałe liczby w tym wierszu można dowolnie zmieniać — przypadkowo lub planowo — byle tylko liczba zaznaczona gwiazdką pozostawała najmniejsza.

Wreszcie wszystkie pozostałe liczby macierzy, które nie znalazły się w kolumnie i w wierszu oznaczonymi gwiazdką, mogą mieć dowolne wartości. Nie mają żadnego wpływu ani na sposób prowadzenia gry, ani na jej cenę.

Cena gry zależy wyłącznie od gwiazdki, a dokładność pomiaru tej gwiazdki warunkuje dokładność oznaczenia ceny gry.

W przytoczonej poniżej grze możemy wysunąć pewne

*Czerwony*

| Niebieski | 1 | 2 | 3 | Wiersze Min |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *z* | *bd* | *ds* | *z* |
| 2 | *d* | *ds* | *d* | *ds** |
| 3 | *z* | *d* | *z* | *z* |
| Kolumny Max | *d** | *bd* | *d** | |

wnioski odnośnie optymalnych strategii:

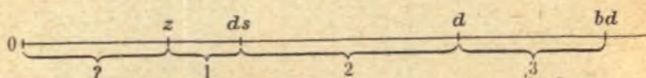
Maksimin jest dostateczny, zaś minimaks — dobry. W grze nie ma więc punktu siodłowego. Dowiedzieliśmy się jednak, że cena gry leży gdzieś pomiędzy dostatecznie i dobrze.

Co więcej, Niebieski 1 dominuje nad Niebieski 3, zaś Czerwony 3 dominuje nad Czerwony 1 i dlatego można sprowadzić grę do następującej macierzy

| *Niebieski* \ *Czerwony* | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | *z* | *bd* |
| 2 | *d* | *ds* |

Częstotliwość przemawiająca za stosowaniem Niebieski 1 jest proporcjonalna do różnicy między dobrze i dostatecznie, zaś częstotliwość stosowania Niebieski 2 jest proporcjonalna do różnicy między bardzo dobrze i niedostatecznie. Niezależnie więc od tego, jakie liczby będą przypisane tym ocenom, jest oczywiste, że Niebieski powinien częściej stosować Niebieski 2 niż Niebieski 1, a nie powinien stosować Niebieski 3.

Sytuacja Czerwonego jest bardziej mglista. Powinien stosować Czerwony 1 z częstotliwością proporcjonalną do różnicy między bardzo dobrze i dostatecznie, zaś Czerwony 2 z częstotliwością proporcjonalną do różnicy między dobrze i niedostatecznie, a nie jest jasne, która różnica jest większa. Wszystko, co możemy powiedzieć o optymalnej mieszanej strategii Czerwonego, to że jest ona oparta na Czerwony 1 i Czerwony 2, i że jego mieszana strategia jest mniej skrajna niż w przypadku Niebieskiego 1. Innymi słowy, względne częstotliwości dla optymalnej strategii Czerwonego mniej różnią się od siebie niż dla optymalnej strategii Niebieski. O słuszności tego przekonamy się łatwo przyjmując pewną skalę ocen i wykonując dla nich obliczenia. Na przykład, dla skali




względne częstotliwości dla Niebieskiego byłyby 3 : 6, zaś dla Czerwonego 5 : 4.

# ERRATA

| strona | jest: | powinno być: |
|---|---|---|
| 10, w. 14 od góry | patrz s. 11, 12 | patrz s. 16 |
| 114, w. 19 od dołu | piszę na s. 118 | piszę na s. 106 |
| 129, w. 3 od góry | (str. 53) | (s. 57) |
| 132, przypis 2 | czasem: dokonywanie odkryć (Przyp. Red.) | *veau Traité de Psychologie*, vol. **VI**, s. 449 |
| 142, przypis 3 | (por. 4) | (por. przypis 4) |

J. Hadamard — *Psychologia odkryć matematycznych*

# ERRATA

| strona | jest: | powinno być: |
|---|---|---|
| 52, w. 14 od góry | Antoine A. Becquerel | Henri A. Becquerel |
| 146, w. 14 ,, | Nayl Bartlett (?) | Nayl Bartlett |
| ,, w. 15 ,, | platyny (?) | platyny |
| ,, przypis | cytowane za „Nauka i Žizń" nr 4, 1954 | cytowane za „Nauka i Žizń" nr 4, 1964 przez red. wyd. pol. |

D. Finkelsztejn — *Gazy szlachetne*

**Przykład 33 — Porcja:** W *Kupcu Weneckim* Szekspir opisał fantazyjnie odzianego przodka współczesnej gry w muszle.

Porcja, bogata spadkobierczyni, nie ma prawa ani wybrać sobie męża według swoich skłonności, ani też odrzucić starań człowieka, którego nie lubi, ponieważ zmarły ojciec życzył sobie, by pretendenci do jej ręki i jego bogactwa spełniali następujący warunek: każdy musi stanąć najpierw przed trzema skrzynkami lub szkatułkami, pośród których znajduje się jedna z portretem Porcji. Pretendent może otworzyć dowolną ze szkatułek. Ten, kto znajdzie portret, stanie się właścicielem Księżniczki. W odróżnieniu od gry w muszle, gdzie w jednej z muszli ukrywa się ziarno grochu, dopiero gdy stawki stają się interesujące, ojciec rzeczywiście włożył portret do jednej ze szkatułek, ponieważ był człowiekiem godnym zaufania; jednakże pretendenci do ręki Porcji nie mają na to żadnych dowodów.

W grze istnieją pewne warunki uboczne: każdy pretendent musi przysiąc, że w przypadku niepowodzenia nie powie nikomu, jaką szkatułkę wybrał; ten warunek ma obronić Porcję przed koalicją jej konkurentów. Każdy z nich musi oprócz tego przysiąc, że w przypadku niepowodzenia, nigdy się nie ożeni; w intencji ojca była zapewne chęć zawężenia kręgu pretendentów i uzyskanie tylko takich kawalerów, którzy uważają Porcję (i jej posag) za niezastąpioną. Z drugiej strony, dla tych, którzy



mają serce do gry, umieszczono bardziej pomocne wskazówki: szkatułki zrobione są ze złota, srebra i ołowiu. Na złotej jest napis: „ten, kto mnie wybierze, wygra to, czego pragnie wielu mężczyzn"; na srebrnej napis: „ten, kto mnie wybierze, otrzyma to, na co zasługuje", zaś na ołowianej — „ten, kto mnie wybierze, musi zaryzykować, że straci wszystko, co posiada". I właśnie prawie wszyscy pretendenci wybrali szkatułkę zawierającą jedynie kurz. Ta gra należy do gier typu 3 × 3 następującego rodzaju:

| Wybór pretendenta \ Wybór ojca | złoto | srebro | ołów |
|---|---|---|---|
| złoto | $P$ | $s$ | $s$ |
| srebro | $s$ | $P$ | $s$ |
| ołów | $s$ | $s$ | $P$ |

W jej macierzy literą $P$ oznaczona jest wygrana, czyli Porcja, co w opinii pretendenta do jej ręki powinno być uznane za czynnik dodatni, zaś literą $s$ oznaczono wieczne starokawalerstwo.

Każdy konkurent może rozpatrywać tę grę jako grę z sumą zerową, bądź też może spróbować odgadnąć intencję ojca. Ponieważ jednak jest zupełnie oczywiste, że ojciec myśli w sposób dziwaczny, ostatnie podejście nie jest zbyt obiecujące.

Na podstawie symetrii można wnioskować, że wybór złotej, srebrnej i ołowianej szkatułki powinien być dokonywany ze względnymi częstotliwościami 1 : 1 : 1. Cena gry równa jest

$$\frac{P+2s}{3}$$

Pretendentowi do ręki Porcji opłaca się wziąć udział w grze tylko wówczas, jeśli $P+2s$ jest dodatnie. Wielkość $P$ jest prawie na pewno dodatnia, zaś wielkość $s$ jest chyba ujemna. Dlatego decyzja pretendenta o przystąpieniu do gry powinna być określona przez następujący stosunek (jeśli jest on rozsądny w sensie teorii gier): musi ubóstwiać Porcję co najmniej dwukrotnie silniej, niż obawiać się starokawalerstwa. Ta informacja nie ułatwi mu wyboru; precyzuje jednak i wyjaśnia ostateczny wynik.

**Przykład 34 — Dziewczyna czy tygrys?** Inspiracją dla tego przykładu było opowiadanie Franka Stocktona *Lady czy tygrys?* Jednakże upiększyliśmy oryginał, aby zamiast, poczciwej gry 2 × 2, otrzymać grę 2 × 3.

Król nie jest zadowolony ze swego Pazia, ponieważ Królewna zakochała się w nim. Król skazał go na otwarcie jednych z dwojga drzwi: za jednymi znajduje się przepiękna, młoda Dziewczyna, za drugimi siedzi przepiękny, młody tygrys. Następnie będziemy zakładać, że kawaler przekłada Dziewczynę nad tygrysa. (Nawiasem mówiąc, musi się z nią ożenić.)

Może się wam wydawać, że pozostało mu niewiele pola dla twórczych rozmyślań, jednakże jest straszliwie zainteresowany wynikami próby. Wreszcie dochodzi do wniosku, że król dał mu większą, niż miał zamiar, swobodę wyboru. Przecież jeśli otworzy równocześnie oboje drzwi, to ma szanse zbiec w powstałym zamieszaniu.

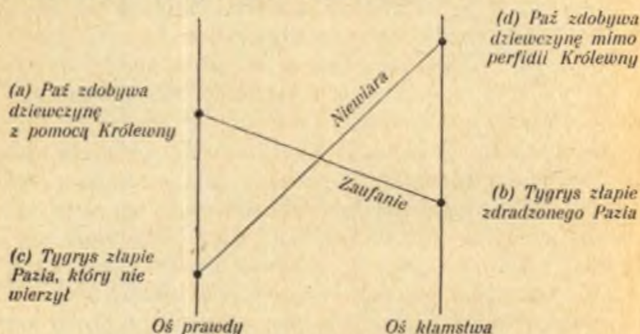
Tymczasem Królewna odkryła zamierzenia króla, nie wiedząc, że król specjalnie umożliwił jej odkrycie swych zamiarów. Królewna daje sygnał Paziowi i wskazuje drzwi, które powinien otworzyć.

Teraz nasz chłopiec posiada obfity materiał do twórczych rozmyślań. Jeśli Królewna kocha go dostatecznie silnie, może nawet woleć, żeby wybrał Dziewczynę; lecz jeśli jej uczucie jest słabe lub zbyt mocne, wówczas może woli, by resztę życia spędził w towarzystwie tygrysa. Królewna ma dwie strategie: może skierować go do Dziewczyny lub do tygrysa. Paź ma trzy strategie: może skorzystać ze wskazówki Królewny lub postąpić odwrotnie. Oprócz tego może próbować zaspokoić apetyt tygrysa kosztem Dziewczyny.

Zamiast określać dokładną wartość wypłat, które młody człowiek powinien przypisać różnym strategiom, zbadajmy zadanie za pomocą metody graficznej wyjaśnionej w rozdz. 2. Oznaczmy elementy macierzy zapłat literami.

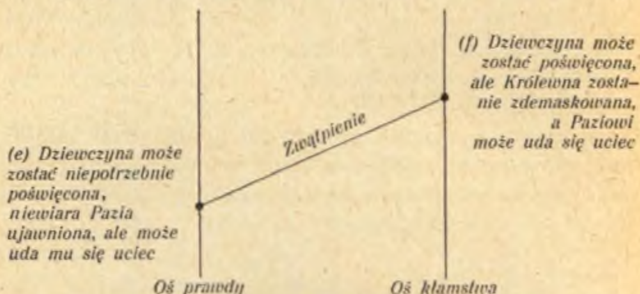
| *Zachowanie się Pazia świadczy o:* | *Królewna mówi:* | |
|---|---|---|
| | *prawdę* | *kłamstwo* |
| *zaufaniu* | $a$ | $b$ |
| *niewierze* | $c$ | $d$ |
| *zwątpieniu* | $e$ | $f$ |

Zastosujemy dwie linie pionowe jako osie wypłat, jedną dla prawdy, drugą dla kłamstwa. Wysokość punktów naniesionych na te osie jest proporcjonalna do wartości, którą Paź przypisuje odpowiedniemu zdarzeniu. Łatwo zrozumieć z jakościowego punktu widzenia, jak powinien on oceniać wszystkie zdarzenia od *a* do *d*.




Gdyby był zmuszony do stosowania dwóch strategii, strategii Zaufania i Niewiary, to powinien oczywiście stosować strategię mieszaną. Wskazuje na to przecinanie się linii. (Gdyby Paź wyżej ocenił zdarzenie *a* niż *d*, to z jakościowego punktu widzenia to zupełnie nie wpływałoby na analizę).

Rozpatrzmy teraz dwie pozostałe możliwości. W tym celu na wykres należy nanieść coś w tym rodzaju:

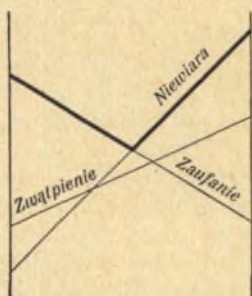



Bez względu na rzeczywistą wartość tych wydarzeń, linia na pewno idzie ku górze od osi Prawdy do osi Kłamstwa.



Sprawa zaczyna się gmatwać w momencie, gdy trzeba nałożyć jeden wykres na drugi. Tu pojawia się krytyczne pytanie: jak powinna przebiegać Linia Wątpliwości; wyżej, czy niżej od punktu przecięcia Linii Zaufania i Niewiary. Jeśli przechodzi wyżej, wówczas Paź powinien mieszać strategie Zaufania i Wątpliwości, jeśli zaś niżej, to jego mieszana strategia powinna składać się ze strategii Zaufania i Niewiary. Te rozwiązania nie zależą od tego, czy linia Wątpliwości przechodzi wyżej lub niżej punktu przecięcia. Nie zależą one i od nachylenia tej linii (pod warunkiem że nie przechodzi ona o tyle wyżej nad pozostałymi liniami, że nie przecina ani jednej z nich; w tym wypadku Wątpliwość staje się rozwiązaniem typu punktu siodłowego). Te wypadki przedstawione są na wykresach.




Aby obliczyć względne częstotliwości każdej strategii, musielibyśmy zająć miejsce młodego Pazia. Pozostawmy jednak wszystkie kłopoty i wątpliwości jemu samemu...

## Gra, którą rozgrywa się tylko raz

W całej książce unikaliśmy pewnego bolesnego punktu i może to spowodować niezadowolenie zarówno laików,

jak i zawodowców, lecz ze zgoła różnych przyczyn. Dlatego wydaje się, że powinniśmy przynajmniej wystawić go na widok publiczny.

Czytelnikom-amatorom może wydać się zupełnie oczywiste, że teoria gier nie daje się zastosować do gier, w które gra się tylko jeden raz, ponieważ już samo pojęcie mieszanej strategii wydaje się wymagać wielokrotnego powtarzania gry. Ci Czytelnicy mogą także odwołać się do niektórych przykładów (np. Dziewczyna czy tygrys?), w których powtórzenie zdarzeń jest oczywiście niemożliwe. Mogą dobrodusznie pokpiwać, że zapędziliśmy się zbyt daleko.

Jest także zrozumiałe, że niektórzy z naszych Czytelników — zawodowców, mogą niepokoić się nieobecnością dyskusji nad tym zagadnieniem. Zmartwią się jednak, ponieważ dotychczas wcale nie stwierdziliśmy kategorycznie, że teoria gier powinna być stosowana jedynie do gier, w które gra się jeden raz. Będą oni prawdopodobnie patrzeć zezem na takie przykłady, jak Cocktail (lub, co gorsza Sprzedawca uliczny), w których gra może się powtarzać. Ci Czytelnicy także chyba uprzejmie napomkną, że zapędziliśmy się zbyt daleko.

Już drugi rzut oka wystarczy, aby przekonać się, że zagadnienie to nie jest atrakcyjnym tematem długich ekskursji; mogłyby one łatwo wyprowadzić nas daleko poza granice odpowiednie dla elementarza. Dlatego ograniczymy podróż do pewnych punktów, pozwalających — mamy nadzieję — Czytelnikowi-amatorowi spostrzec poprzez mgłę zbawienny ląd.

Wierzymy, że taki Czytelnik jest w stanie przyjąć bez dowodów oświadczenia, iż ściśle matematyczne twierdzenia Teorii Gier zostały wyprowadzone dla jednej partii gry. Jeśli to zostało przyjęte, wówczas nie trudno uwierzyć, że teoria ma zastosowanie również i do gier, w które gra się tylko jeden raz. Gdy wykładaliśmy tutaj teorię gier, istniały podstawy by przypuszczać, że mówimy przez cały czas o zdarzeniach powtarzających się. Ten sposób ujęcia był wygodniejszy (i w dodatku — jak sądzimy — naukowo uzasadniony), ale nie był wcale konieczny, ponieważ rozpatrywane częstotliwości nie są potrzebne

w subtelnych poszukiwaniach matematycznych, które stworzyły teorię gier.

Możemy przytoczyć argumentację, która znajdzie u Ciebie, Czytelniku, bezpośredni oddźwięk: rozpatrzmy niepowtarzalną grę, diabelnie dla nas ważną, w której Wasz przeciwnik dysponuje niesłychaną inteligencją. Załóżmy także, że jeśli przeciwnik dowie się, jaką strategię wybraliśmy, pociągnie to za sobą tragiczne następstwa. Naszą jedyną nadzieją jest zastosowanie dla wyboru strategii mechanizmu losowego, którego rezultatów rozum przeciwnika nie zdoła przewidzieć. Może oczywiście mieć łut szczęścia i w jakiś sposób odgadnąć nasz wybór; musimy jednak podjąć pewne ryzyko. Teoria gier określa po prostu cechy, jakie powinien posiadać nasz mechanizm losowy.

Możemy przyjąć również inny punkt widzenia, zgodnie z którym w ciągu całego życia, od kolebki aż do grobu, musimy grać ogromną ilość gier jednorazowych, z których nie wszystkie grożą śmiercią, przy czym stosowanie strategii mieszanych powiększa średnią wygraną przypadającą jako rezultat wszystkich partii.

Specjalista teorii gier ma na ten temat dwa punkty widzenia. Po pierwsze: ponieważ teoria opracowana była ściśle do jednej partii gry, nie jest przekonany, iż będzie identyczna z teorią, którą byłby opracował, gdyby mu powiedziano, że gra będzie przeprowadzona, na przykład, dokładnie jedenaście razy. Autorowi wydaje się, że taki punkt widzenia zgodny jest z nauką przez duże N, lecz że stanowi niepotrzebne ograniczenie dla praktyka, któremu nie dano jeszcze do ręki metody rozwiązywania gier z jedenastoma strategiami i który nie może czekać, aż taka teoria się pojawi.

Jednakże w przypadku gier przeciw Naturze, nie odrzucajmy zbyt pochopnie punktu widzenia uczonego-purysty, ponieważ długa kolejność partii danej gry może zawierać informację dotyczącą strategii Natury, której nie należy ignorować. Istotnie, tu Specjalista teorii gier wkracza w dziedzinę statystyka, dysponującego pełnym workiem sztuczek naukowych, do rozwiązywania różnych problemów.

## Gry symetryczne

Innym typem gier o specjalnych własnościach są gry *symetryczne*. Grę nazywamy symetryczną, jeśli w macierzy wypłat między wierszami i kolumnami istnieje następujący związek: kolejność wypłat w każdym wierszu jest dokładnie taka sama jak ich kolejność w odpowiedniej kolumnie z tym, że znaki są przeciwne. Jedną z konsekwencji takiego określania jest to, że elementy leżące na głównej przekątnej równe są zeru. Tak więc macierz

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 |
| −2 | 0 | −6 |
| −3 | 6 | 0 |

jest macierzą gry symetrycznej. Na przykład, trzeci wiersz (− 3, 6, 0) i trzecia kolumna (3, −6, 0) posiadają wymagane własności, podobnie jak wszystkie pozostałe pary wierszy i kolumn.

Mamy dwie pożyteczne cechy gier symetrycznych: po pierwsze, są to gry sprawiedliwe, a ponieważ wiemy, że cena takich gier równa jest zeru, nie ma więc potrzeby jej obliczać; po drugie — obaj gracze mogą stosować jedną i tę samą strategię.

Każda gra może być przekształcona w inną większą lecz symetryczną grę; może się to okazać korzystne z punktu widzenia obliczeń. W tym celu, niezbędna jest dodatnia cena w pierwotnej grze. To zawsze możemy osiągnąć dodając do każdej wypłaty dostatecznie dużą liczbę dodatnią, co — jak wiemy — nie wpłynie na wybór strategii; liczbę tę można odjąć od końcowego obliczenia ceny gry.

Dla zilustrowania tej metody rozpatrzmy grę i dwie pomocnicze macierze, składające się z jedynek

*Czerwony*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 4 | 1 |

| |
|---|
| 1 |
| 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |

Oznaczmy literami *G*, *V* i *H* odpowiednio macierz gry, oraz macierz pionową i poziomą. Następnie tworzymy super-macierz takiego typu:

| | | |
|---|---|---|
| 0 | $G$ | $-V$ |
| $-G^*$ | 0 | $H^*$ |
| $V^*$ | $-H$ | 0 |

Tutaj gwiazdka oznacza rozkaz zamienienia wiersza kolumnami; minus oznacza zmianę znaków wszystkich elementów macierzy. Zera reprezentują macierze składające się z samych zer. Podstawiając zamiast tych symboli ich wartości otrzymamy:

| | | *Czerwony* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | 6 |
| *Niebieski* | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 15 | −135 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 | 11 | −85 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 10 | 6 | −65 |
| | 4 | −1 | −5 | −10 | 0 | 0 | 40 |
| | 5 | −15 | −11 | −6 | 0 | 0 | 120 |
| | 6 | 135 | 85 | 65 | −40 | −120 | 0 |

Jest to macierz gry symetrycznej. Obaj „gracze" tej gry 6 × 6 mogą stosować tę samą optymalną strategię. (Należy oczywiście odróżnić kryptonimy graczy gry symetrycznej od „prawdziwych" graczy grających pierwotną grę.)

Jeśli teraz uda się nam znaleźć optymalną strategię naszej gry, której ostatnia kolumna jest jedną z aktywnych czystych strategii, to strategie tej gry będą związane ze strategiami pierwotnej gry, tak jak to pokazano w następującym schemacie:

| | Niebieski | Czerwony | Cena gry |
|---|---|---|---|
| Strategie gry pierwotnej | 1 2 | 1 2 3 | |
| Strategie gry symetrycznej | 1 2 | 3 4 5 | 6 |

Inaczej mówiąc, częstotliwości stosowania różnych czystych strategii Niebieskiego i Czerwonego są równe częstotliwościom związanym z dwiema pierwszymi grupami czystych strategii gry symetrycznej, zaś cena pierwotnej

gry jest proporcjonalna do względnej częstotliwości ostatniej czystej strategii. W danym przypadku rozwiązaniem symetrycznej gry jest: 3 : 2 : 0 : 2 : 3 : 11, co odpowiada następującemu rozwiązaniu pierwotnej gry:

| | *Czerwony* 1 | 2 | 3 | *Częstotliwości Nieb.* |
|---|---|---|---|---|
| *Niebieski* 1 | 5 | 1 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 4 | 1 | 2 |
| *Częstotliwości Czerw.* | 0 | 2 | 3 | |

Jej cena równa jest $^{11}/_{5}$.

## Programowanie liniowe

Przekonaliśmy się już niejednokrotnie na przykładach przytoczonych w tej książce, że teoria gier może być ludziom użyteczna w szerokim zakresie. Dlatego nie będzie może niespodzianką fakt, iż jest związana ona także z rozwojem teorii w różnych dziedzinach wiedzy. Ta więź ma czasem miejsce w zakresie pojęć, czasem jest czysto formalna (gdy stosowane są np. podobne metody matematyczne). W obu przypadkach przynosi korzyść wszystkim zainteresowanym, ponieważ wymiana idei i metod prowadzi do wzbogacenia wszystkich dziedzin wiedzy.

Jako przykład takiej wymiany rozpatrzmy metody naukowego kierowania administracją. Pionierem w tej dziedzinie było lotnictwo wojskowe USA, które próbowało opracować schemat racjonalnego planowania i zaopatrzenia, zabezpieczający nadsyłanie w różnych terminach i z różnych źródeł różnych materiałów niezbędnych dla wykonania zadań wojskowych i to w sposób najbardziej ekonomiczny. Z punktu widzenia obliczeń zadania tego typu mogą być sprowadzone do formy gry, zaś przytoczony poniżej przykład będzie tego ilustracją.

**Przykład 35 — Dieta:** John opracował nowy typ diety opartej przede wszystkim na mięsie. Musi zjadać jedną uncję tłuszczu na każde trzy uncje chudego mięsa. Po-



nieważ koszty stanowią jeden z podstawowych aspektów wszelkich diet mięsnych, postanowił obliczyć, ile będzie go kosztować pewna nominalna ilość mięsa — powiedzmy co najmniej 10 funtów — składającego się z wymaganej proporcji tłuszczu i chudego mięsa.

Mięsny sklep w sąsiedztwie dostarcza trzech gatunków mięsa, które podobają się Johnowi. Zawierają one 1, 5 i 10 uncji tłuszczu w funcie i kosztują odpowiednio 1,35, 0,85 i 0,65 dolara. Fakty te można podsumować w trzech następujących macierzach (jednostkami są odpowiednie uncje i centy):

| Mięso | *tłuste* | *chude* | *cena* |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 15 | 135 |
| 2 | 5 | 11 | 85 |
| 3 | 10 | 6 | 65 |

| *Ilości wymagane* | *tłuste* | *chude* |
|---|---|---|
| | 40 | 120 |

Oznaczmy macierze gatunków mięsa, cen i ilości literami $M$, $C$ i $I$.

Zbudujmy teraz nową macierz zbiorczą, w którą wejdą nasze macierze jako elementy:

| | | |
|---|---|---|
| $0$ | $M$ | $-C$ |
| $-M^*$ | $0$ | $I^*$ |
| $C^*$ | $-I$ | $0$ |

W tej macierzy minus oznacza, że każdy element podma-

cierzy powinien zmieniać znak na odwrotny; gwiazdki — że wszystkie wiersze podmacierzy powinny być zastąpione przez kolumny; zero — że podmacierz składa się z samych zer. Podstawiając wartości symboli *M*, *C* i *I* otrzymujemy nową, rozszerzoną macierz:

| Niebieski* \ *Czerwony** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 5 | 1 | 3 | −1 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 4 | 1 | −1 |
| 3 | −5 | −2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | −1 | −4 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | −3 | −1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | −1 | −1 | −1 | 0 |

Jako starzy wyjadacze rozpoznamy w tych problemach od razu grę; po prostu dlatego, że tak można rozpatrywać każdą macierz. Nasza okazała się grą 6 × 6 i to w dodatku grą symetryczną; czyli gra jest sprawiedliwa i każda optymalna strategia odpowiednia dla jednego gracza nadaje się także dla drugiego. Kto mógłby podejrzewać, że jej rozwiązanie łączy się z zagadnieniem diety?

Każda gra ma rozwiązanie, lecz pewne zadania programowania liniowego takiego rozwiązania nie posiadają. Jeśli zadanie programowania liniowego ma rozwiązanie, wówczas okazuje się, że musi istnieć optymalna strategia dla gry, której ostatni wiersz (lub kolumna) — w naszym przypadku szósty — jest aktywny, tzn. jej względna częstotliwość nie jest równa zeru. Gdy ten warunek jest spełniony, to rozwiązanie zadania programowania liniowego znajdujemy przez podzielenie względnych częstotliwości każdej z pierwszych grup wszystkich strategii — w naszym wypadku pierwszej, drugiej i trzeciej — przez względną częstotliwość ostatniej strategii — w naszym przykładzie szóstej.

W podanym przykładzie grę należy prowadzić ze względnymi częstotliwościami 0 : 120 : 0 : 0 : 85 : 11. Ponieważ ostatnia względna częstotliwość (11) nie jest równa zeru, to zadanie programowania liniowego ma rozwiązanie.

Istotnie, John powinien kupić $^{0}/_{11}$, $^{120}/_{11}$ i $^{0}/_{11}$ funtów oferowanych trzech gatunków mięsa; tzn. powinien kupić $10\,^{10}/_{11}$ funtów mięsa po 0,85 dolara za funt i unikać pozostałych gatunków. Tak więc musi kupić 120 uncji chudego mięsa i około 54 uncji tłuszczu za 9,27 dolarów. Nadmiar tłuszczu w stosunku do żądanej ilości 40 uncji stanowi niezbędną stratę. Zakup wzorcowej mieszanki mięsa i tłuszczu, kosztowałaby Johna więcej. (Przecież ceny nie są ustalone tak, aby było łatwo rozwiązywać problemy diety.)

## Gry z sumą niezerową

Chcemy tylko pokazać, jaka jest istota tych gier. Chcąc zrobić coś więcej, musielibyśmy zapuścić się w głębiny matematyki i, co gorsza, wzburzone wirami sprzeczności.

W grach z zerową sumą wypłaty dokładnie odpowiadają wymianie kapitałów: jeden gracz wygrywa tyle, ile traci drugi. Zastosowaliśmy tę zasadę częściowo w grach przeciw Naturze (których przykłady przewijały się tu i ówdzie), gdzie obliczaliśmy strategie dla gracza-człowieka w ten sposób, jak gdyby grał z przeciwnikiem, który zgodził się z jego oceną macierzy i który mógłby stosować rozumne przeciwdziałania. Doprowadza to gracza-człowieka do stosowania nadmiernie ostrożnych strategii. Nie udaje mu się osiągnąć tyle, ile mógłby wygrać grając przeciw zupełnemu niedojdzie. Istnieje zadowalający w zasadzie sposób poprawienia sytuacji; po prostu odkryć strategie Natury (co w przypadkach szczególnych może okazać się możliwe) i następnie wykorzystywać słabe miejsca jej metody.

Gry z sumą niezerową zawierają pewien element podobny do Natury: wygrane jednego gracza nie zawsze równe są przegranym innego, ponieważ obaj mogą zarówno przegrać, jak i wygrać. Aby zachować przyjętą uprzednio formę analizy, możemy rozpatrywać Naturę jako czynnik biorący również udział w grze, pochłaniający wartości tracone przez graczy i wspomagający ich

wygrane. Taką grę opisuje się dwiema macierzami i może ona mieć następującą postać:

*Natura (Czerw.)*

| *Niebieski* | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 2 |
| 2 | 3 | 0 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | 0 |

*Czerwony*

| *Natura (Nieb.)* | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 0 | 3 |
| 2 | 5 | 4 | 3 |
| 3 | 0 | 1 | 4 |

Tak więc natura ma podwójną osobowość: jedną dla Niebieskiego, drugą zaś — dla Czerwonego.

Jeśli Niebieski rozpatruje tylko macierz z lewej i uważa ją za zwykłą parzystą grę z sumą zerową, to powinien stosować strategię z względnymi częstotliwościami 4 : 6 : 1, zaś jego wygrana wyniesie średnio $2\,^4/_{11}$, przy czym płatnikiem będzie Natura (*Czerw.*). Macierz z prawej strony może w podobny sposób doprowadzić Czerwonego do zastosowania strategii 0 : 1 : 3 i do przegranej $3\,^1/_4$, którą zagarnie Natura (*Nieb.*). Jednym słowem, Natura (*Nieb.*) i Natura (*Czerw.*) dzielą swoje wygrane i przegrane.

Przy grze jednego gracza przeciw Naturze Niebieski mógłby wygrać więcej niż $2^4/_{11}$, jeśli przestudiuje jej zachowanie i wykorzysta zdobytą wiedzę. Lecz w naszym przykładzie Natura (*Czerw.*) jest wilkiem w owczej skórze, ponieważ za jej plecami ukrywa się Czerwony i kontroluje jej strategię. Ma tu więc miejsce koalicja, w której Czerwony jest generałem, zaś Natura (*Czerw.*) — bankierem. Zupełnie podobne powiązania zachodzą między Niebieskim i Naturą (*Nieb.*). Dlatego jeśli Niebieski odchodzi od optymalnej strategii 4 : 6 : 1, aby wygrać nieco więcej, może zostać pobity przez czujnie śledzącego go Czerwonego.

Lecz może mieć miejsce i inny przypadek. Wyobraźmy sobie, że Niebieski wybrał strategię 1 : 0 : 0, zaś Czerwony strategię 0 : 1 : 0. Wygrana Niebieskiego wynosi teraz 6 zamiast $2\,^4/_{11}$, zaś przegrana Czerwonego wynosi 0 zamiast $3\,^1/_4$. Tak więc obaj gracze zagrali znacznie lepiej niż poprzednio: Niebieski wygrał, ile tylko było możliwe, zaś Czerwony przegrał najmniejszą z możliwych sum.

Staje się jasne, *że Niebieski i Czerwony mogą z wzajemną korzyścią utworzyć koalicję przeciwko Naturze, aby wygrać od niej możliwie najwięcej.*

Prowadzi to do poważnych trudności. Mamy przecież do czynienia z klasycznym problemem złodziei: jak podzielić dole. Jeśli koalicja da więcej niż to, co otrzymują gracze, gdy będą działać niezależnie od siebie, to jak rozdzielić nadmiar? Jaki układ dodatkowych wypłat należy opracować, aby koalicja rozkwitła i aby dochody były dostatecznie duże i aby członkowie koalicji pozostawali lojalni? W jakich wypadkach gracz powinien zgodzić się na gorszą wypłatę po to, aby ukarać drugiego gracza? Nie szczędzi się poważnych wysiłków, aby znaleźć zadowalające kryteria pozwalające wybrać najdogodniejsze strategie — strategie poszczególnych partii i układ wypłat pomocniczych. Abstrakcyjna twórczość potrzebuje jednak poważnego kierownictwa ze strony praktyki, realnych sytuacji zaczerpniętych z rzeczywistości i doświadczeń laboratoryjnych. Temat ten, choć fascynujący, wykracza jednak poza skromne granice niniejszej książki.

# Zakończenie

Teraz możemy już uczynić to, czego nie mogliśmy dokonać na początku: przedstawić mianowicie zwięzłą definicję Teorii Gier, tak jak uczyniliśmy w rozdz. 1 odnośnie prawa powszechnego ciążenia. Teraz dysponujemy już obszernym słownikiem terminologicznym i wystarczającą znajomością mechanizmu analizy i formułowania zadań, by rozumieć szereg twierdzeń, które na początku książki wydawałyby się nieznośnie fachowe.

Przytoczony poniżej opis teorii dotyczy tylko materiału przedstawionego w książce. Niektóre zagadnienia wymagają uogólnienia; do nich należą np. gry nieskończone, gry z sumą niezerową czy też gry z $n$ graczami.

Teoria Gier jest metodą analizy konfliktów zgodnie z następującym określeniem: Konflikt jest sytuacją, w której istnieją dwie grupy przeciwstawnych interesów. Można go rozpatrywać jako grę między dwoma przeciwnikami, z których każdy reprezentuje jedną grupę interesów. Każdy gracz posiada skończoną liczbę strategii, z których może wybrać tylko jedną w każdej danej partii gry. Wspólny kapitał graczy przy końcu każdej partii gry jest taki sam, jak na jej początku. Każdy z graczy chce postępować wg pewnego ostrożnego planu, którego celem jest maksymalne zwiększenie jego średniej wygranej. Tę maksymalną średnią wygraną, zw. ceną gry,

można obliczyć. Każdy gracz, jeśli gra poprawnie, może być przekonany o tym, że otrzyma cenę gry. W tym celu musi wybrać odpowiednią strategię: a metody poprawnego wyboru strategii istnieją. Mogą zdarzyć się różne sytuacje: gracz może być zmuszony do ukrywania przed przeciwnikiem strategii wybranej przez siebie dla każdej partii gry; nigdy nie trzeba ukrywać pozostałych informacji, oprócz bieżącego wyboru; itd.

Matematyce przyswaja się różne nazwy. Nazywa się ją, między innymi, królową nauk i służką nauk. Chociaż istnieją pewne wątpliwości co do jej dokładnego pochodzenia społecznego, to nie ma jednak żadnych rozbieżności dotyczących jej płci. Istotnie, każda nauka wygląda prawdopodobnie bardzo kobieco w oczach mężczyzn, którzy się nią zajmują; uważają swoją pracę za rozpaczliwie pociągającą i historia badań naukowych pełna jest dowodów niewierności i kapryśności tej, której służą; krótko mówiąc — coś w rodzaju kociaka.

Co więcej, jej reakcja na próby poganiania i kierowania jest zwykle zupełnie oszałamiająca. Porusza się swobodnie, lecz często w zupełnie niespodziewanym kierunku. Od wielu, wielu lat ludzie spędzają całe życie próbując rozwinąć ją w określonym kierunku, zupełnie bez powodzenia. Z wąskiego punktu widzenia ich pracę można by uznać za bezowocną. Niepowodzenia te często rodzą zupełnie niespodziewane sukcesy w innych dziedzinach wiedzy, ponieważ nauka porusza się mimo wszystko w jakimś kierunku, gdy się ją popycha.

Można przytoczyć liczne przykłady. Niektóre z nich są powszechnie znane. W paru słowach opowiem jeden. Plamy na Słońcu, gigantyczne ogniste wichry na jego powierzchni, pojawiają się — jak wiadomo — periodycznie. Strumienie cząstek i wyzwalana przy tym energia mają pewien wpływ na Ziemię; zakłócają np. dalekosiężną łączność radiową. Przypuszcza się, że plamy słoneczne wpływają także na pogodę na Ziemi, lecz istota tej zależności jest dotąd niejasna.

Pewnemu astronomowi, nazwiskiem A. E. Douglass, przyszła do głowy myśl, że coroczny wzrost drzew, o którym możemy wnioskować na podstawie słojów na prze-



cięciu pnia, musi odpowiadać długotrwałej rejestracji opadów deszczu; jeśli zaś plamy na Słońcu mają wpływ na pogodę, to kolejność słojów na drzewach można uważać za zapis aktywności słońca.

Douglass stracił prawie 40 lat pracując intensywnie nad tym zagadnieniem. Główny efekt, którego szukał, był zupełnie oczywisty, lecz szczegóły były zupełnie zagmatwane i sprzeczne i to tak dalece, że czasami cała analiza tonęła w mgle nieokreśloności. Ułożył jednak bardzo dokładną chronologię drzew obejmującą okres 2 tysięcy lat i więcej. Dla niego była to praca uboczna, lecz archeologom posługującym się tym „drzewnym kalendarzem" pozwala obecnie bardzo precyzyjnie (z dokładnością do jednego roku) datować ruiny dawnych cywilizacji na podstawie kawałków drewna znalezionych w budynkach lub kawałka węgla drzewnego z paleniska obozowego.

Teoria gier została początkowo opracowana przez matematyka, który miał na uwadze określone zagadnienia ekonomiczne. Pierwsza reakcja ekonomistów na tę pracę była bardzo sceptyczna, lecz uczeni pracujący w dziedzinie militarnej szybko zwęszyli jej możliwości i pomagali w jej rozwoju. Programowanie liniowe było sprzężeniem zwrotnym ponownie z naukami ekonomicznymi i znalazło szerokie zastosowanie w handlu i przemyśle. Podstawowe pojęcia teorii gier stanęły na pierwszej linii frontu podczas rewolucji w zakresie teorii statystycznej, unifi-

kującej pozornie zupełnie różne dziedziny wiedzy. Pojęcia te zaczynają znajdować zastosowanie także w naukach społecznych, gdzie mogą rzucić światło na pewne aspekty stosunków międzyludzkich. Trudno przewidzieć, gdzie z kolei wkroczy teoria gier.

Chociaż już dzisiaj — mimo swoich ograniczeń — teoria gier znajduje zastosowanie, jednakże jej podstawowa zasługa polega prawdopodobnie na tym, iż dała ogólną orientację ludziom, stojącym twarzą w twarz z bardzo skomplikowanymi problemami. I chociaż teoria gier nie umożliwia ścisłego rozwiązywania tych zagadnień — przynajmniej obecnie i prawdopodobnię w bliskiej przyszłości — tym nie mniej pomaga zakreślić ramy dla wysiłków skierowanych na ich rozwiązanie. Pojęcie strategii, różnice między graczami, rola zdarzeń losowych, macierzowe przedstawienie wypłat, pojęcie strategii czystych i mieszanych itd. dają cenną orientację ludziom, którzy muszą myśleć o złożonych sytuacjach konfliktowych.

## Rozwiązanie ćwiczeń

Podajemy tu rozwiązania ćwiczeń.

Porównując z nimi własne wyniki, Czytelnik powinien rozważyć następujące uwagi:

1) wszystkie względne częstotliwości są wyrażone w najprostszej formie, tzn. wykonano skrócenie przez wspólny czynnik. Tak więc, względne częstotliwości 8 : 24 : 16 są zapisane jako 1 : 3 : 2.

2) chociaż nie zwracaliśmy na to uwagi w pierwszych rozdziałach książki, to jednak jest faktem, że wiele gier posiada więcej niż jedno podstawowe rozwiązanie. Staraliśmy się przytoczyć wszystkie podstawowe rozwiązania dla gier pierwszych grup ćwiczeń. Alternatywne rozwiązania oznaczone są literami a, b itd. Jest jednak możliwe, że znajdziecie poprawne rozwiązanie, którego nie umieściliśmy w naszym spisie. W takim przypadku rozwiązanie to będzie kombinacją dwóch lub trzech podanych rozwiązań.

Dla późniejszych ćwiczeń dotyczących gier 4 × 4 i większych, nie próbowaliśmy przytoczyć wszystkich rozwiązań. Jednak wówczas, gdy będziecie gotowi do rozwiązywania większych gier, sami już będziecie umieli bez trudności określić, czy wasze rozwiązanie jest poprawne.

Ponieważ wartości gier są jednoznaczne, wasze rezultaty powinny być zawsze zgodne z naszymi.

### Ćwiczenie 1

| Nr | Niebieski 1 | Niebieski 2 | Czerwony 1 | Czerwony 2 | Cena gry |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | −7 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3/2 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3/2 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1/2 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 3 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | −1/3 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5/3 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 93/2 |
| 15 | 1 | 1 | 5 | 4 | 0 |
| 16 | 8 | 9 | 10 | 7 | 3/17 |
| 17 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 18 | 3 | 1 | 1 | 1 | −1 |
| 19 | 10 | 1 | 10 | 111 | 1019/11 |
| 20 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 |

**Ćwiczenie 2**

| Nr | Niebieski 1 | 2 | Czerwony 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Cena gry |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | −6 |
| 3 | 3 | 1 | 0 | 1 | 7 | | | | | | 7/4 |
| 4 | 7 | 9 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 13 | 0 | 0 | 293/16 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | | 5/2 |
| 6 | 10 | 11 | 0 | 0 | 1 | 20 | | | | | 11/21 |
| 7 | 5 | 7 | 7 | 5 | 0 | 0 | 0 | | | | 23/12 |
| 8 | 5 | 4 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | −1/3 |
| 9 | 7 | 6 | 0 | 19 | 0 | 0 | 7 | | | | −3/13 |
| 10 | 5 | 3 | 0 | 7 | 0 | 9 | 0 | | | | −13/8 |
| 11 | 5 | 7 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | 7/2 |
| 12 | 7 | 6 | 0 | 7 | 6 | | | | | | 42/13 |
| 13(*a*) | 1 | 1 | 4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | 5 |
| (*b*) | | | 3 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | | | |
| (*c*) | | | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | | | |
| (*d*) | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | | | |
| (*e*) | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | | | |
| (*f*) | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | | | |
| (*g*) | | | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 4 | | | |
| (*h*) | | | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 3 | | | |
| (*i*) | | | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | | | |

| Nr | Niebieski 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Czerwony 1 | 2 | Cena gry |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 0 | 0 | 1 | | | | | | 1 | 0 | 9 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | 1 | 1 | 3 |
| 16 | 1 | 0 | 0 | | | | | | 0 | 1 | −3 |
| 17 | 1 | 1 | 0 | | | | | | 1 | 1 | 1/2 |
| 18 | 0 | 0 | 1 | | | | | | 1 | 1 | 1 |
| 19 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | 1 | 1 | 2 |
| 20 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | | | | 2 | 1 | 19/5 |

**Ćwiczenie 3**

| Nr | Niebieski | | | Czerwony | | | Cena |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | gry |
| 1(*a*) | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| (*b*) | | | | 1 | 0 | 1 | |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 4(*a*) | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| (*b*) | | | | 1 | 0 | 2 | |
| (*c*) | | | | 0 | 9 | 7 | |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2/3 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4/7 |
| 8 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 15/7 |
| 9 | 18 | 5 | 22 | 25 | 9 | 11 | 142/45 |
| 10 | 21 | 19 | 16 | 16 | 31 | 9 | 67/56 |
| 11(*a*) | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| (*b*) | | | | 0 | 1 | 0 | |
| 12(*a*) | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| (*b*) | 0 | 1 | 0 | | | | |
| 13(*a*) | 0 | 1 | 1 | 9 | 21 | 4 | 3/2 |
| (*b*) | | | | 1 | 1 | 0 | |
| 14 | 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3/8 |
| 15 | 0 | 7 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3/4 |
| 16 | 1 | 0 | 6 | 3 | 0 | 4 | 21/5 |
| 17 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 18 | 2 | 5 | 0 | 0 | 6 | 1 | 17/7 |
| 19(*a*) | 0 | 5 | 2 | 3 | 4 | 0 | 23/7 |
| (*b*) | | | | 6 | 1 | 7 | |
| 20 | 1 | 1 | 0 | 3 | 1 | 0 | 5/2 |
| 21 | 36 | 11 | 10 | 10 | 25 | 22 | 226/57 |
| 22 | 15 | 19 | 40 | 24 | 35 | 15 | 297/74 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10/3 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 8 | 2 | 11 | 509/3 |
| 25 | 3 | 0 | 4 | 6 | 0 | 1 | 24/7 |
| 26 | 0 | 1 | 9 | 3 | 0 | 2 | 23/5 |
| 27 | 4 | 5 | 0 | 8 | 0 | 1 | 40/9 |
| 28 | 11 | 9 | 15 | 8 | 14 | 13 | 108/35 |
| 29(*a*) | 0 | 5 | 3 | 1 | 4 | 3 | 23/8 |
| (*b*) | | | | 5 | 0 | 3 | |
| 30 | 4 | 1 | 0 | 2 | 3 | 0 | 12/5 |
| 31 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |

## Ćwiczenie 4

| Nr | Niebieski 1 | 2 | 3 | Czerwony 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Cena gry |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | 4 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | 6 |
| 3 | 1 | 8 | 9 | 9 | 8 | 1 | 0 | | | 59/18 |
| 4 | 7 | 5 | 1 | 0 | 4 | 3 | 6 | | | 15/13 |
| 5(*a*) | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | 1/2 |
| (*b*) | | | | 0 | 1 | 1 | 0 | | | |
| (*c*) | | | | 0 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 6(*a*) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | | | 3/4 |
| (*b*) | | | | 1 | 0 | 0 | 1 | | | |
| (*c*) | | | | 0 | 1 | 1 | 0 | | | |
| 7 | 10 | 9 | 23 | 0 | 5 | 8 | 1 | | | 55/14 |
| 8(*a*) | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | 3 |
| (*b*) | 0 | 1 | 3 | | | | | | | |
| 9(*a*) | 3 | 3 | 2 | 17 | 0 | 3 | 12 | 0 | | 17/8 |
| (*b*) | | | | 11 | 0 | 9 | 0 | 12 | | |
| 10(*a*) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 19/5 |
| (*b*) | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| (*c*) | | | | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| (*d*) | | | | 4 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| (*e*) | | | | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | |
| (*f*) | | | | 0 | 1 | 7 | 0 | 0 | 1 | |
| (*g*) | | | | 0 | 4 | 0 | 0 | 7 | 4 | |
| (*h*) | | | | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | |

| Nr | Niebieski 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Czerwony 1 | 2 | 3 | Cena gry |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11(*a*) | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | 1 | 0 | 2 | 0 |
| (*b*) | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | | 0 | 2 | 1 | |
| (*c*) | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | | |
| (*d*) | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | | | | | | |
| (*e*) | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | | | | | | |
| 12(*a*) | 0 | 0 | 13 | 0 | 2 | 0 | | 3 | 8 | 10 | −68/5 |
| (*b*) | 13 | 0 | 0 | 0 | 17 | 0 | | 4 | 6 | 11 | |
| 13 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1/3 |
| 14 | 0 | 0 | 13 | 2 | | | | 1 | 0 | 4 | 17/5 |
| 15(*a*) | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | 1 | 0 | 0 | 3 |
| (*b*) | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | |

| Nr | Niebieski 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Czerwony 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Cena gry |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1(*a*) | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | 2 |
| (*b*) | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | 5 |
| 3(*a*) | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | 3 |
| (*b*) | | | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 2 | | | | | |
| 4(*a*) | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | 0 |
| (*b*) | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| (*c*) | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | |
| (*d*) | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 5 | 8 | 3 | 7 | 9 | | | | | 5 | 7 | 3 | 3 | | | | | 2/9 |
| 6 | 76 | 92 | 78 | 89 | | | | | 61 | 72 | 161 | 41 | | | | | 688/335 |
| 7 | 109 | 130 | 11 | 276 | | | | | 132 | 235 | 68 | 91 | | | | | 2101/526 |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 2 | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | 5 |
| 9 | 38 | 0 | 0 | 21 | 12 | 0 | | | 0 | 49 | 8 | 14 | | | | | 147/71 |
| 10 | 61 | 72 | 161 | 41 | | | | | 76 | 0 | 0 | 92 | 78 | 89 | 0 | 0 | 688/335 |
| 11 | 28 | 33 | 31 | 21 | 29 | | | | 4 | 35 | 6 | 57 | 40 | | | | 149/142 |
| 12 | 520 | 247 | 233 | 348 | 378 | | | | 332 | 849 | 34 | 266 | 245 | | | | 6703/1726 |
| 13 | 5 | 51 | 9 | 25 | 19 | | | | 1096 | 2086 | 493 | 139 | 764 | | | | 324/109 |
| 14 | 415 | 540 | 660 | 245 | 405 | | | | 273 | 352 | 535 | 665 | 440 | | | | 2703/453 |
| 15 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | 5 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 5 | 4 | | | | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | | | | 8/3 |
| 17 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | 0 | 0 | 0 | 5 | 4 | | | | 1/3 |
| 18 | 36 | 11 | 0 | 0 | 10 | | | | 10 | 25 | 0 | 22 | 0 | | | | 226/57 |
| 19 | 10 | 9 | 23 | 0 | 0 | 0 | | | 0 | 0 | 5 | 8 | 0 | 1 | | | 27/14 |
| 20(*a*) | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | 0 | 1 | 3 | 0 | 6 | | | | 0 |
| (*b*) | | | | | | | | | 6 | 5 | 3 | 6 | 0 | | | | |
| 21 | 132 | 0 | 235 | 68 | 0 | 91 | | | 109 | 130 | 11 | 276 | 0 | 0 | 0 | | 2101/520 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 3 |

### Ćwiczenie 6

| Niebieski 1 | 2 | 3 | 4 | Czerwony 1 | 2 | 3 | 4 | Cena gry |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 0 | 4 | | | | | |
| 17 | 7 | 0 | 12 | | | | | |
| 0 | 28 | 51 | 65 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 |
| 28 | 0 | 3 | 17 | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | | | | | |

# Tablica liczb przypadkowych

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 16 43 63 18 | 75 06 13 76 74 | 40 60 31 61 52 | 83 23 53 73 61 |
| 21 21 59 17 91 | 76 83 15 86 78 | 40 94 15 35 85 | 69 95 86 09 16 |
| 10 43 84 44 82 | 66 55 83 76 49 | 73 50 58 34 72 | 55 95 31 79 57 |
| 36 79 22 62 36 | 33 26 66 65 83 | 39 41 21 60 13 | 11 44 28 93 20 |
| 73 94 40 47 73 | 12 03 25 14 14 | 57 99 47 67 48 | 54 62 74 85 11 |
| 49 56 31 28 72 | 14 06 39 31 04 | 61 83 45 91 99 | 15 46 98 22 85 |
| 64 20 84 82 37 | 41 70 17 31 17 | 91 40 27 72 27 | 79 51 62 10 07 |
| 51 48 67 28 75 | 38 60 52 93 41 | 58 29 98 38 80 | 20 12 51 07 94 |
| 99 75 62 63 60 | 64 51 61 79 71 | 40 68 49 99 48 | 33 88 07 64 13 |
| 71 32 55 52 17 | 13 01 57 29 07 | 75 97 86 42 98 | 08 07 46 20 55 |
| 65 28 59 71 98 | 12 13 85 30 10 | 34 55 63 98 61 | 88 26 77 60 68 |
| 17 26 45 73 27 | 38 22 42 93 01 | 65 99 05 70 48 | 25 06 77 75 71 |
| 95 63 99 97 54 | 31 19 99 25 58 | 16 38 11 50 69 | 25 41 68 78 75 |
| 61 55 57 64 04 | 86 21 01 18 08 | 52 45 88 88 80 | 78 35 26 79 13 |
| 78 13 79 87 68 | 04 68 98 71 30 | 33 00 78 56 07 | 92 00 84 48 97 |
| 62 49 09 92 15 | 84 98 72 87 59 | 38 71 23 15 12 | 08 58 86 14 90 |
| 24 21 66 34 44 | 21 28 30 70 44 | 58 72 20 36 78 | 19 18 66 96 02 |
| 16 97 59 54 28 | 33 22 65 59 03 | 26 18 86 94 97 | 51 35 14 77 99 |
| 59 13 83 95 42 | 71 16 85 76 09 | 12 89 35 40 48 | 07 25 58 61 49 |
| 29 47 85 96 52 | 50 41 43 19 66 | 33 18 68 13 46 | 85 09 53 72 82 |
| 96 15 59 50 09 | 27 42 97 29 18 | 79 89 32 94 48 | 88 39 25 42 11 |
| 29 62 16 65 83 | 62 96 61 24 68 | 48 44 91 51 02 | 44 12 61 94 38 |
| 12 63 97 52 91 | 71 02 01 72 65 | 94 20 50 42 59 | 68 98 35 05 61 |
| 14 54 43 71 34 | 54 71 40 24 01 | 38 64 80 92 78 | 81 31 37 74 00 |
| 83 40 38 88 27 | 09 83 41 13 33 | 04 29 24 60 28 | 75 66 62 69 54 |
| 67 64 20 52 04 | 30 69 74 48 06 | 17 02 64 97 37 | 85 87 51 21 39 |
| 64 04 19 90 11 | 61 04 02 73 09 | 48 07 07 68 48 | 02 53 19 77 37 |
| 17 04 89 45 23 | 97 44 45 99 04 | 30 15 99 54 50 | 83 77 84 61 15 |
| 93 03 98 94 16 | 52 79 51 06 31 | 12 14 89 22 31 | 31 36 16 06 50 |
| 82 24 43 43 92 | 96 60 71 72 20 | 73 83 87 70 67 | 24 86 39 75 76 |
| 96 99 05 52 44 | 70 69 32 52 55 | 73 54 74 37 59 | 95 63 23 95 55 |
| 09 11 97 48 03 | 97 30 38 87 01 | 07 27 79 32 17 | 79 42 12 17 69 |
| 57 66 64 12 04 | 47 58 97 83 64 | 65 12 84 83 34 | 07 49 32 80 98 |
| 46 49 26 15 94 | 26 72 95 82 72 | 38 71 66 13 80 | 60 21 20 50 99 |
| 08 43 31 91 72 | 08 32 02 08 39 | 31 92 17 64 58 | 73 72 00 86 57 |
| 10 01 17 50 04 | 86 05 44 11 90 | 57 23 82 74 64 | 61 48 75 23 29 |
| 92 42 06 54 31 | 16 53 00 55 47 | 24 21 94 10 90 | 08 53 16 15 78 |
| 35 54 25 58 65 | 07 30 44 70 10 | 31 30 94 93 87 | 02 33 00 24 76 |
| 86 59 52 62 47 | 18 55 22 94 91 | 20 75 09 70 24 | 72 61 96 66 28 |
| 72 11 53 49 85 | 58 03 69 91 37 | 28 53 78 43 95 | 26 65 43 78 51 |
| 07 42 85 88 63 | 96 02 38 89 36 | 97 92 94 12 20 | 86 43 19 44 85 |
| 35 37 92 79 22 | 28 90 65 50 13 | 40 56 83 32 22 | 40 48 69 11 22 |
| 10 98 22 28 07 | 10 92 02 62 99 | 41 48 39 29 35 | 17 06 17 82 52 |
| 90 12 73 33 41 | 77 80 61 24 46 | 93 04 06 64 76 | 24 99 04 10 99 |
| 63 00 21 29 90 | 23 51 06 87 74 | 76 86 93 93 00 | 84 97 80 75 04 |
| 40 77 98 63 82 | 48 45 46 52 69 | 02 98 25 79 91 | 50 76 59 19 30 |
| 43 21 61 26 08 | 18 16 78 46 31 | 94 47 97 65 00 | 39 17 00 66 29 |
| 96 16 76 43 75 | 74 10 89 36 43 | 52 29 17 58 22 | 95 96 69 09 47 |
| 70 97 56 26 93 | 35 68 47 26 07 | 03 68 40 36 00 | 52 83 15 53 81 |
| 85 81 26 18 75 | 23 57 07 57 54 | 58 93 92 83 66 | 86 76 56 74 65 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 37 10 06 24 92 | 63 64 24 76 38 | 54 72 35 65 27 | 53 07 63 82 35 |
| 53 40 61 38 55 | 38 51 92 95 00 | 84 82 88 12 48 | 25 54 83 40 75 |
| 55 17 28 15 56 | 18 85 65 90 43 | 65 79 90 19 14 | 81 36 30 51 73 |
| 40 35 38 48 07 | 47 76 74 68 90 | 87 91 73 85 49 | 48 21 37 17 08 |
| 18 89 90 96 12 | 77 54 15 76 75 | 26 90 78 81 73 | 71 18 92 83 77 |
| 68 14 12 53 40 | 92 55 11 13 26 | 68 05 26 54 22 | 88 46 00 63 52 |
| 51 55 99 11 59 | 81 31 06 32 51 | 42 58 76 81 49 | 88 14 79 97 00 |
| 92 21 43 33 86 | 73 45 97 93 59 | 97 17 65 54 16 | 67 64 20 50 51 |
| 15 08 95 05 57 | 33 16 68 70 94 | 53 29 58 71 33 | 38 26 49 47 08 |
| 96 46 10 06 04 | 11 12 02 22 54 | 23 01 19 41 08 | 29 19 66 51 87 |
| | | | |
| 28 17 74 41 11 | 15 70 57 38 35 | 75 76 84 95 49 | 24 54 36 32 85 |
| 66 95 34 47 37 | 81 12 70 74 93 | 86 66 87 03 41 | 66 46 07 56 48 |
| 19 71 22 72 63 | 94 57 54 98 20 | 56 72 77 20 36 | 50 34 73 35 21 |
| 68 75 66 47 57 | 19 98 79 22 22 | 27 93 67 80 10 | 09 61 70 44 08 |
| 75 02 26 53 32 | 98 60 62 94 51 | 31 99 46 90 72 | 37 35 49 30 25 |
| 11 32 37 00 69 | 90 26 98 92 66 | 02 98 59 53 03 | 15 18 25 01 66 |
| 55 20 86 34 70 | 18 15 82 52 83 | 89 96 51 02 06 | 95 83 09 54 06 |
| 11 47 40 87 86 | 05 59 46 70 45 | 45 58 72 96 11 | 98 57 94 24 81 |
| 81 42 28 68 42 | 60 99 77 96 69 | 01 07 10 85 30 | 74 30 57 75 09 |
| 21 77 17 59 63 | 23 15 19 02 74 | 90 20 96 85 21 | 14 29 33 91 94 |
| | | | |
| 42 27 81 21 60 | 32 57 61 42 78 | 04 98 26 84 70 | 27 87 51 54 80 |
| 17 69 76 01 14 | 63 24 73 20 96 | 19 74 02 46 37 | 97 37 73 21 12 |
| 05 68 63 02 43 | 34 12 40 29 36 | 50 19 77 98 69 | 86 49 76 87 09 |
| 52 99 24 66 50 | 89 91 05 73 95 | 46 95 46 75 36 | 28 96 88 19 36 |
| 94 51 89 39 84 | 81 47 86 77 50 | 82 54 96 26 76 | 31 12 34 98 99 |
| 00 18 47 21 86 | 78 90 67 54 80 | 61 79 88 16 00 | 80 01 88 47 42 |
| 87 46 26 31 65 | 79 81 66 16 30 | 57 66 62 90 55 | 46 51 80 14 87 |
| 88 69 25 87 16 | 12 27 34 81 76 | 29 80 56 49 94 | 66 87 26 22 30 |
| 20 09 44 29 62 | 41 38 21 67 68 | 06 71 13 49 39 | 19 59 97 62 47 |
| 60 93 58 15 04 | 50 52 08 21 53 | 13 93 44 68 85 | 58 31 58 83 66 |
| | | | |
| 51 39 28 59 36 | 43 89 85 05 96 | 28 54 99 83 27 | 99 94 32 53 77 |
| 54 23 94 19 13 | 79 52 64 62 74 | 40 87 16 18 03 | 25 76 75 54 84 |
| 57 89 27 33 94 | 07 16 09 02 62 | 47 70 43 83 55 | 71 70 88 01 17 |
| 02 33 07 47 36 | 53 27 44 44 68 | 62 61 11 96 98 | 09 30 42 92 65 |
| 76 11 52 92 47 | 55 34 25 12 99 | 03 04 78 39 81 | 11 91 60 92 67 |
| 63 31 28 18 86 | 29 08 52 01 01 | 26 46 05 05 01 | 31 73 11 89 38 |
| 27 63 22 15 70 | 34 27 45 64 26 | 01 76 42 59 59 | 69 29 38 98 75 |
| 06 33 56 21 11 | 44 01 45 25 67 | 11 76 25 48 06 | 02 65 15 29 12 |
| 64 14 28 76 76 | 21 35 88 87 73 | 31 73 63 16 95 | 11 52 36 42 13 |
| 28 43 62 54 68 | 75 23 57 53 70 | 97 15 54 87 06 | 52 23 92 18 31 |
| | | | |
| 09 52 28 38 55 | 85 97 31 58 88 | 31 18 14 96 72 | 17 23 70 40 24 |
| 93 71 41 54 14 | 93 71 20 27 42 | 32 11 58 26 83 | 67 18 28 90 30 |
| 15 68 15 35 99 | 58 18 57 38 40 | 07 06 87 59 47 | 71 74 36 92 85 |
| 77 71 22 39 14 | 08 90 74 37 68 | 26 62 27 41 84 | 75 16 69 67 48 |
| 78 45 35 48 44 | 61 50 90 12 45 | 02 80 55 26 76 | 22 51 94 78 48 |
| 24 86 06 82 84 | 19 36 72 90 73 | 32 30 15 87 01 | 04 19 33 01 42 |
| 37 28 40 68 44 | 78 88 75 72 76 | 26 33 95 69 09 | 39 33 14 21 01 |
| 35 48 85 24 73 | 37 63 43 25 69 | 95 27 40 95 08 | 81 01 24 24 13 |
| 51 59 55 99 09 | 35 22 34 49 91 | 24 27 53 96 32 | 09 77 79 88 00 |
| 90 66 03 51 71 | 30 02 19 11 20 | 36 11 64 21 23 | 65 40 19 41 99 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 47 50 50 20 08 | 20 30 08 71 88 | 96 19 50 70 59 | 13 26 63 13 89 |
| 13 35 00 84 14 | 64 04 99 43 77 | 22 40 89 49 58 | 19 09 55 80 35 |
| 33 00 69 26 90 | 69 24 89 74 43 | 53 89 62 35 08 | 16 22 75 69 29 |
| 55 21 66 38 86 | 06 80 41 18 61 | 22 56 50 24 75 | 00 25 87 90 18 |
| 21 99 12 62 28 | 14 80 11 91 92 | 49 43 82 07 72 | 60 84 66 97 32 |
| 71 02 52 82 12 | 10 47 42 75 22 | 65 62 03 46 84 | 00 21 00 48 63 |
| 65 52 21 52 42 | 84 55 47 45 60 | 20 24 62 69 41 | 41 29 80 47 63 |
| 27 97 55 49 23 | 90 65 00 61 70 | 09 43 30 91 67 | 35 16 63 27 31 |
| 07 30 00 97 04 | 36 09 96 15 77 | 95 55 27 34 56 | 16 57 88 81 40 |
| 54 35 71 36 89 | 19 56 90 38 14 | 76 05 30 51 50 | 69 12 56 94 42 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 00 97 70 44 81 | 42 04 40 86 49 | 34 82 23 58 43 | 78 46 88 23 80 |
| 13 92 07 87 61 | 12 31 19 28 08 | 07 75 30 40 73 | 58 52 08 00 22 |
| 08 39 53 70 43 | 37 88 03 41 72 | 04 20 49 44 34 | 62 79 88 19 02 |
| 46 16 66 72 06 | 01 61 94 37 69 | 96 77 01 94 40 | 29 70 04 20 93 |
| 87 76 77 76 07 | 03 74 20 16 13 | 65 98 96 28 43 | 10 91 73 44 58 |
| 29 88 09 52 88 | 21 64 44 65 87 | 06 64 49 47 84 | 66 99 56 18 12 |
| 36 24 83 66 66 | 14 89 45 92 73 | 88 95 04 60 77 | 34 65 11 20 38 |
| 12 38 62 96 56 | 30 47 42 59 64 | 21 48 29 54 22 | 02 00 23 36 71 |
| 52 06 87 38 01 | 52 18 81 94 91 | 55 13 76 10 39 | 02 00 66 99 13 |
| 41 72 75 21 71 | 56 71 90 60 54 | 98 44 18 15 29 | 59 60 76 52 25 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 49 31 97 45 80 | 57 47 01 46 00 | 57 16 83 04 58 | 23 89 20 78 25 |
| 88 78 67 69 63 | 12 12 72 50 14 | 71 88 66 53 34 | 38 01 30 93 79 |
| 84 86 69 52 02 | 43 98 37 26 55 | 40 41 85 95 04 | 52 38 30 72 32 |
| 11 84 92 64 82 | 20 46 19 94 50 | 28 83 37 66 61 | 47 27 79 29 35 |
| 54 96 61 75 94 | 57 39 37 32 67 | 37 88 36 21 24 | 62 19 94 95 42 |
| 10 95 93 33 49 | 80 71 99 67 51 | 44 88 23 35 92 | 66 23 41 38 21 |
| 22 78 40 77 83 | 35 90 30 00 91 | 19 08 21 38 73 | 07 18 42 15 66 |
| 86 03 76 17 91 | 33 81 56 39 68 | 45 31 62 92 83 | 89 31 85 58 06 |
| 80 03 76 50 89 | 85 91 97 43 91 | 22 78 85 54 33 | 31 18 87 48 82 |
| 72 75 18 43 59 | 15 76 91 36 15 | 08 29 38 61 93 | 05 02 62 12 55 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18 53 20 38 74 | 66 22 07 90 50 | 29 22 37 05 41 | 67 11 58 45 84 |
| 22 93 62 20 58 | 49 17 11 10 27 | 22 68 18 01 10 | 31 59 50 92 46 |
| 66 39 77 65 10 | 81 15 00 07 04 | 74 58 09 03 54 | 43 74 42 21 78 |
| 89 73 02 32 72 | 65 42 03 50 91 | 69 09 37 13 64 | 08 10 79 69 52 |
| 81 82 17 53 23 | 96 06 89 17 24 | 40 45 69 12 34 | 58 09 06 53 42 |
| 94 37 78 25 54 | 53 58 61 14 32 | 72 92 76 73 49 | 83 96 25 89 12 |
| 68 48 54 99 91 | 53 16 51 98 65 | 61 86 93 30 93 | 81 12 90 64 81 |
| 07 33 00 71 84 | 86 78 86 45 77 | 40 04 81 65 20 | 07 63 81 07 97 |
| 10 99 31 49 30 | 35 07 23 64 29 | 68 77 39 76 69 | 28 65 68 99 38 |
| 20 80 11 51 78 | 64 45 38 33 57 | 09 77 43 07 51 | 49 74 01 13 85 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 79 24 13 53 47 | 66 85 17 92 47 | 46 13 93 66 89 | 82 58 71 35 86 |
| 43 59 33 95 55 | 97 34 55 84 94 | 26 56 69 53 23 | 32 99 38 99 88 |
| 29 52 26 27 13 | 33 70 11 71 86 | 06 76 55 71 41 | 48 61 71 82 82 |
| 88 83 64 72 90 | 67 27 47 83 62 | 35 38 49 03 80 | 12 31 78 97 02 |
| 65 90 56 62 53 | 91 48 23 06 89 | 49 33 37 84 82 | 36 19 91 13 55 |
| 44 79 86 93 71 | 07 86 59 17 56 | 45 59 51 40 44 | 56 80 69 91 26 |
| 35 51 09 91 39 | 32 03 12 79 25 | 79 81 91 50 54 | 76 17 41 22 06 |
| 50 12 59 32 23 | 64 20 94 97 14 | 11 97 16 22 34 | 74 85 74 64 01 |
| 25 17 39 00 38 | 63 87 14 04 18 | 11 45 28 93 18 | 53 08 42 19 93 |
| 68 45 99 00 94 | 44 99 59 37 18 | 38 74 68 12 71 | 96 26 09 81 37 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 93 36 91 30 44 | 69 68 67 81 62 | 66 37 80 29 19 | 34 01 25 00 80 |
| 19 36 05 50 49 | 94 95 17 63 41 | 84 01 93 06 90 | 25 65 67 29 96 |
| 47 79 88 98 90 | 06 89 36 54 83 | 17 70 12 12 92 | 14 88 01 53 86 |
| 69 22 33 20 07 | 03 51 36 11 49 | 32 54 69 20 72 | 62 52 22 15 04 |
| 34 51 15 07 21 | 84 85 03 41 59 | 97 13 86 19 19 | 97 78 92 85 75 |
| 54 03 15 93 29 | 58 96 35 22 20 | 35 29 22 79 24 | 55 46 74 30 36 |
| 66 72 28 55 15 | 04 72 39 24 11 | 02 73 70 81 68 | 30 04 36 34 50 |
| 71 05 90 74 96 | 38 40 41 81 26 | 28 26 13 78 44 | 12 54 31 43 98 |
| 45 47 88 60 66 | 31 13 53 32 43 | 80 57 33 06 06 | 48 64 45 30 08 |
| 97 24 69 11 21 | 89 43 72 03 93 | 77 15 38 85 52 | 26 84 31 28 44 |
| 22 98 22 59 36 | 96 41 73 48 45 | 85 14 95 75 04 | 15 05 93 68 49 |
| 18 24 36 29 93 | 47 13 28 52 48 | 35 22 97 28 37 | 36 75 27 16 55 |
| 93 51 41 49 15 | 67 96 08 22 03 | 40 11 72 43 46 | 32 18 98 70 74 |
| 69 70 79 83 03 | 93 06 91 62 16 | 60 87 59 75 45 | 68 65 29 21 60 |
| 87 46 79 17 94 | 70 81 41 27 43 | 03 76 93 25 51 | 74 80 14 16 92 |
| 81 00 68 14 98 | 59 37 53 05 02 | 94 07 79 22 09 | 31 50 66 96 06 |
| 15 45 88 34 81 | 50 18 74 33 75 | 94 37 60 06 66 | 94 14 52 23 99 |
| 33 46 91 25 10 | 23 09 54 80 16 | 42 35 41 13 47 | 90 92 00 38 64 |
| 67 19 80 71 76 | 65 99 61 83 17 | 81 14 94 32 91 | 10 81 74 43 48 |
| 58 03 79 22 61 | 85 50 45 56 90 | 10 63 17 82 38 | 00 15 74 62 59 |
| 84 98 36 83 12 | 25 51 95 61 58 | 86 30 00 76 89 | 14 00 67 77 53 |
| 35 55 40 29 35 | 72 88 96 87 72 | 19 85 03 96 50 | 65 22 21 55 63 |
| 04 36 81 76 32 | 50 96 27 19 08 | 94 46 46 64 32 | 62 24 31 36 74 |
| 81 31 16 04 79 | 69 98 53 09 52 | 23 92 14 97 30 | 21 71 89 23 14 |
| 03 82 38 98 87 | 55 82 87 44 52 | 72 77 52 37 16 | 42 85 37 47 93 |
| 80 42 26 54 37 | 38 79 75 62 61 | 27 81 64 67 04 | 82 73 50 33 39 |
| 61 30 74 94 68 | 43 34 44 37 00 | 20 20 77 70 88 | 17 16 72 45 31 |
| 83 87 38 25 57 | 10 00 28 00 93 | 59 28 30 44 94 | 60 72 52 14 31 |
| 38 11 01 68 55 | 28 92 29 37 58 | 88 73 13 63 76 | 51 38 35 76 19 |
| 43 89 29 11 89 | 87 22 65 69 35 | 84 76 26 79 96 | 75 00 00 17 45 |
| 93 68 30 96 64 | 53 92 74 98 85 | 20 75 49 23 55 | 57 95 51 09 40 |
| 32 74 80 21 21 | 11 97 29 69 14 | 28 06 56 95 64 | 06 83 55 68 45 |
| 49 21 19 29 63 | 38 62 56 53 12 | 62 17 57 33 53 | 84 97 21 77 26 |
| 63 36 56 42 24 | 69 47 55 75 12 | 11 04 45 04 83 | 68 82 19 74 26 |
| 63 57 62 63 73 | 44 61 04 37 48 | 00 33 16 34 22 | 99 62 27 67 57 |
| 41 07 84 70 36 | 65 52 46 84 66 | 67 15 72 64 19 | 37 97 81 65 11 |
| 70 84 68 95 58 | 64 17 31 53 81 | 87 71 35 08 41 | 46 27 02 65 08 |
| 68 80 06 44 92 | 20 16 23 27 07 | 10 28 18 25 25 | 74 15 58 67 49 |
| 44 97 78 95 25 | 51 26 96 37 47 | 91 36 77 40 33 | 67 02 06 90 92 |
| 79 35 46 38 47 | 24 39 55 36 79 | 40 56 03 69 14 | 69 17 63 19 18 |
| 14 95 42 22 99 | 40 15 65 26 85 | 29 22 33 83 83 | 30 31 57 09 99 |
| 01 71 19 84 39 | 09 44 63 39 37 | 49 09 54 02 38 | 81 69 71 24 74 |
| 62 32 85 53 28 | 45 73 89 39 40 | 27 46 62 69 27 | 53 34 51 13 79 |
| 73 00 46 21 09 | 81 90 77 10 77 | 57 46 37 00 45 | 65 12 34 90 70 |
| 34 21 88 94 45 | 05 60 95 23 36 | 50 55 89 22 42 | 52 73 28 15 02 |
| 99 15 90 19 68 | 45 88 68 68 75 | 28 41 39 59 18 | 44 15 64 69 59 |
| 92 85 82 99 49 | 15 81 79 33 72 | 56 65 74 31 93 | 58 13 05 42 73 |
| 27 39 69 74 77 | 65 55 47 16 01 | 13 12 16 88 67 | 95 76 35 96 67 |
| 37 10 34 53 09 | 30 12 94 33 80 | 96 99 68 93 56 | 22 78 46 01 84 |
| 57 34 79 70 12 | 48 42 82 06 06 | 60 74 22 22 26 | 89 99 32 45 97 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 41 72 09 72 | 84 13 42 91 66 | 71 99 34 28 19 | 28 79 91 30 95 |
| 70 18 50 54 60 | 07 35 38 58 55 | 11 83 80 22 91 | 89 88 24 16 13 |
| 06 39 35 20 17 | 21 23 62 05 30 | 14 30 05 53 19 | 47 90 83 92 32 |
| 42 60 59 24 74 | 09 36 14 24 04 | 33 72 24 77 22 | 12 54 72 97 59 |
| 26 48 34 88 73 | 84 26 03 32 85 | 51 27 58 48 21 | 87 44 30 24 91 |
| 93 60 97 74 25 | 57 26 86 93 20 | 13 56 80 08 25 | 80 83 58 36 39 |
| 19 79 00 32 65 | 68 47 42 96 78 | 08 45 60 14 75 | 40 31 77 20 77 |
| 63 43 46 72 51 | 20 51 08 06 27 | 62 61 86 40 27 | 64 47 75 04 32 |
| 76 63 64 27 71 | 12 58 35 63 29 | 59 51 22 52 49 | 42 18 50 96 22 |
| 51 25 87 43 30 | 47 75 15 26 72 | 10 99 59 19 22 | 50 21 71 41 87 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 26 01 42 38 | 88 39 15 08 58 | 60 73 55 89 65 | 58 49 20 96 66 |
| 31 81 15 09 35 | 89 51 01 55 66 | 22 09 62 63 38 | 30 24 00 43 43 |
| 48 83 26 95 24 | 32 11 34 66 73 | 24 96 59 71 07 | 41 85 68 52 96 |
| 32 36 71 84 57 | 03 31 22 55 64 | 75 10 99 31 42 | 91 95 16 88 94 |
| 90 34 61 74 76 | 71 03 92 14 97 | 64 00 15 42 64 | 71 66 79 42 62 |
| 98 51 30 86 79 | 69 41 38 20 67 | 68 25 07 45 01 | 48 84 60 91 00 |
| 08 48 41 56 17 | 82 79 00 83 24 | 95 09 12 70 82 | 73 94 95 95 33 |
| 60 04 28 75 62 | 49 72 82 64 00 | 10 11 21 06 30 | 82 87 33 93 12 |
| 87 65 38 64 09 | 09 27 73 83 79 | 09 93 45 75 87 | 44 00 52 10 90 |
| 35 71 10 03 98 | 30 49 45 09 23 | 33 30 85 14 41 | 13 80 43 26 09 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 46 48 33 27 22 | 74 79 96 02 77 | 09 29 94 26 17 | 94 65 41 13 15 |
| 60 85 80 63 37 | 20 22 03 49 52 | 98 21 86 97 10 | 03 42 79 92 55 |
| 70 78 30 14 52 | 87 66 12 40 28 | 41 83 04 04 72 | 46 04 10 89 52 |
| 65 34 64 30 42 | 62 13 43 22 85 | 35 20 18 56 72 | 66 68 85 39 48 |
| 96 34 95 21 64 | 23 29 87 22 17 | 41 64 06 30 18 | 74 28 09 16 70 |
| 63 46 91 34 59 | 11 09 19 66 46 | 37 84 93 43 89 | 55 97 49 94 43 |
| 60 57 97 54 98 | 97 81 58 61 51 | 60 23 67 57 05 | 83 33 98 49 23 |
| 31 01 87 40 81 | 01 49 40 61 65 | 70 80 28 81 89 | 11 59 41 34 47 |
| 00 04 73 38 02 | 73 34 25 43 38 | 43 35 49 39 50 | 54 76 53 75 53 |
| 55 75 48 69 00 | 87 93 10 12 38 | 15 44 92 88 47 | 82 63 56 85 43 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 38 05 83 03 46 | 35 72 27 88 49 | 92 82 54 05 36 | 76 78 04 42 64 |
| 06 90 44 32 00 | 89 09 23 09 74 | 00 70 16 65 89 | 04 62 25 13 54 |
| 48 43 07 91 89 | 59 69 09 38 30 | 59 93 99 51 37 | 65 79 94 11 47 |
| 78 55 65 87 76 | 35 37 02 47 74 | 57 49 08 58 05 | 04 16 80 74 03 |
| 07 66 20 77 12 | 70 41 09 94 28 | 76 51 36 93 39 | 33 70 13 21 84 |
| 98 74 51 23 38 | 11 08 80 54 54 | 06 87 15 01 32 | 50 01 02 40 89 |
| 52 92 38 13 43 | 14 90 82 38 96 | 01 52 90 94 99 | 57 66 00 23 09 |
| 35 16 59 31 08 | 32 06 82 15 47 | 54 73 97 37 96 | 14 28 37 69 59 |
| 65 22 11 22 07 | 66 07 95 94 34 | 94 94 61 72 41 | 82 75 41 80 73 |
| 74 45 35 59 75 | 85 46 39 45 67 | 49 80 03 00 54 | 85 78 02 30 94 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 03 49 66 06 56 | 69 73 55 50 53 | 15 39 38 25 29 | 15 76 08 97 88 |
| 64 25 28 09 87 | 44 41 63 14 38 | 26 05 53 00 56 | 15 22 61 10 81 |
| 49 22 51 16 47 | 69 73 37 99 39 | 86 30 53 50 43 | 66 21 97 48 31 |
| 62 47 61 93 65 | 16 56 86 25 09 | 89 14 62 53 24 | 22 75 93 56 01 |
| 21 11 93 11 66 | 78 38 51 48 75 | 86 85 79 94 04 | 91 54 77 49 34 |
| 35 08 65 00 39 | 71 25 14 57 69 | 27 90 84 89 44 | 09 01 75 43 97 |
| 33 33 07 87 01 | 88 53 64 13 98 | 86 41 32 07 09 | 41 58 96 36 41 |
| 68 34 64 53 55 | 37 07 24 08 32 | 33 91 55 38 90 | 19 88 73 41 08 |
| 55 52 63 17 47 | 57 30 90 92 38 | 78 74 26 99 71 | 30 14 87 26 47 |
| 86 02 05 57 48 | 08 63 66 37 73 | 07 22 80 50 82 | 72 82 19 10 26 |

# Przypisy

1 Barret-Browning E. — pisarka angielska XIX wieku (przyp. red.).

2 Gra polega na tym, że wokół krzeseł chodzi parę osób (więcej niż krzeseł), które starają się zająć miejsce z chwilą przerwania muzyki. Przegrywają te osoby, które nie znajdują miejsca (przyp. red.).

3 John von Neumann (1903—1957) jeden z najznakomitszych i najbardziej wielostronnych matematyków naszego wieku (przyp. red.).

Pierwszy artykuł von Neumanna dotyczący teorii gier został opublikowany w 1928 r., lecz pierwszy szczegółowy wykład teorii pojawił się w 1944 r. (*Teoria gier i zachowania ekonomicznego* John von Neumann i Oskar Morgenstern, Princeton University Press, Princeton, N. Y.). Problemowy charakter tej pracy od razu ocenili niektórzy recenzenci; np. A. H. Copeland pisał: „Potomkowie będą oceniać tę książkę, jako jedno z ważniejszych osiągnięć naukowych 1 poł. XX wieku". ("Bulletin of the American Mathematical Society" t. LI, 1945, s. 498 nn.).

4 Dane zebrane z dziesięciu korpusów w okresie dwudziestu lat (1875—1894). Ilość wypadków śmiertelnych na korpus wynosiła:

| ilość wypadków śmiertelnych | wypadki obserwowane | wypadki obliczone |
|---|---|---|
| 0 | 109 | 109 |
| 1 | 65 | 66 |
| 2 | 22 | 20 |
| 3 | 3 | 4 |
| 4 | 1 | 1 |

Wartości obliczone otrzymano na podstawie następującego założenia: jeden wypadek śmiertelny zdarza się średnio raz na 20 miesięcy, i na podstawie teorii statystycznej, która może być stosowana także dla rzadkich przypadków.

[5] Aby uniknąć nawet cienia rozczarowania na tym początkowym etapie teorii gier, wymienimy sami wszystkie trasy. Niebieski może poruszać się wzdłuż tras następujących (rozpoczynając w każdym przypadku od punktu *N* i kończąc w punkcie *C*): b, bac, bacd, ab, ac, acd, dcab, dc, d. Czerwony może odwiedzać: b, ba, ca, cd, d.

[6] Rodzaj gry w kości (przyp. red.).

[7] lub: wartość gry (przyp. red.).

[8] Pozwoliliśmy sobie przyswoić angielskie słowo *mix*, należące do żargonu naukowego. Wiele razy przed tłumaczem powstawały problemy, czy i jak adaptować język książki, często posługujący się celowo zwrotami gwarowymi i żargonem naukowym. Z żalem stwierdzić wypada brak adekwatnych wyrazów i, co gorzej, tradycji upraszczania naukowej terminologii w języku polskim (przyp. red.).

[9] Szczególne cechy tej alternatywnej metody rozpatrzymy później (patrz s. 117 n.).

[10] Szczególne cechy tej alternatywnej metody rozpatrzymy później (patrz s. 117 n.).

[11] Angielskie słowa występujące w grze: *ax* (siekiera), *it* (ono), *at* (przy), *if* (jeśli) (przyp. red.).

[12] Pewien czytelnik — kosmopolita poinformował nas, że jest to zjawisko dość częste: np. kiełbaski zw. wiedeńskimi we Frankfurcie znane są pod nazwą frankfurterów w Wiedniu.

[13] Możecie uważać to za nieuczciwe, ponieważ przyrzekliśmy ograniczyć książkę do elementarnej arytmetyki, a tu już nie po raz pierwszy wyskakuje coś mocniejszego — np. teoria prawdopodobieństwa. W rzeczywistości podstawą naszej książki jest solidny matematyczny fundament. Nawet takie rzeczy, które przerabialiśmy wspólnie zupełnie automatycznie, były dotychczas rozpatrywane w specjalnych technicznych czasopismach; artykuły pisane są takim językiem, że nie każdy rozpoznałby w nim angielski. Zaś proces abstrakcji i modelowania, za pomocą którego przechodzi od realnego świata do macierzy gier, może wymagać głębokiej wiedzy o istocie badanych zagadnień, znacznie szerszych wiadomości matematycznych, pewnej wynalazczości, a niekiedy i ślęczenia po nocach. Staramy się pogodzić te zagadnienia w następujący sposób: rozpatrujemy różne strony Teorii Gier i ustalamy czysto arytmetyczne reguły. Problem fizyczny i macierze gier wynikają, jeśli to możliwe, z prostych rozumowań. W przeciwnym przypadku stosujemy skrycie te narzędzia, które są potrzebne, i przedstawiamy wam produkt końcowy — gotową macierz.

[14] Wątłe wyrażenie „mamy nadzieję" zastosowano, by uwzględ-

nie możliwość błędów liczbowych i pewną poważniejszą trudność, którą rozpatrzymy w następnym paragrafie.

[15] Rozszerzoną analizę tego zagadnienia znajdziecie dalej na s. 159.

[16] Moi niezmordowani doradcy wskazali od razu chiński wariant tej gry: człowiek zjada koguta, kogut połyka robaka, robak pożera człowieka.

[17] Można powiedzieć: $15n$ szerszeni, $5n$ ważek, i $n$ trzmieli. Jeśli $n$ jest dostatecznie duże, tak że Profesor dodając jednego owada nie zmienia praktycznie ich względnej ilości. Wówczas prawdopodobieństwo złapania na haczyk równe jest $1/15n : 1/5n : 1/n$. Lecz litera $n$ jest kiepskim przyjacielem człowieka pracy, dlatego mnożymy przez $30n$ i otrzymujemy 2 : 6 : 30. Dlaczego pomnożyliśmy właśnie przez $30n$? Po pierwsze, dlaczego nie? A po drugie, aby uniknąć ułamków później, gdy profesor zastosuje nowe cacko-przynętę, którą można pomylić z dowolnym owadem, lecz które może równocześnie spowodować dwukrotnie większe podejrzenia i dlatego prawdopodobieństwa złapania się na tę przynętę wynoszą odpowiednio 1 : 3 : 15.

[18] Ten proces nie jest ani aż tak głupi, ani tak przypadkowy, jak mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka. W istocie istnieje ścisła matematyczna teoria, która dowodzi jego prawidłowości. Jeśli kiedyś w kursie algebry uczyliście się, jak obliczać wyznaczniki, to rozpoznaliście ten proces na długo przed przeczytaniem tego przypisu.

[19] Rozdz. 5 zawiera dwa paragrafy rozpoczynające się na s. 198, w których omawia się zagadnienie ważności pomiaru — czy oceny — i wymaganej przy tym dokładności.

[20] Zobacz s. 196 (Mnogie rozwiązania).

Inne uwagi:

Redakcja „Omega", pragnąc poznać opinię Czytelników o serii, uprzejmie prosi o wypełnienie naszej ankiety. Odpowiedzi wykorzystamy przy ustalaniu tematów serii na następne lata. Z góry serdecznie dziękujemy.

Opłaci adresat

**PAŃSTWOWE**

**WYDAWNICTWO NAUKOWE**

**Redakcja „OMEGA"**

**W A R S Z A W A**

**ul. Miodowa 10**

**Które 5 tomików „Omegi" z 20 wydanych w 1964 r. wyróżnia Pan(i) jako najbardziej interesujące i wartościowe (przekreślić właściwe numery)**

**1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20**

Proszę podać dziedziny zainteresowań:

wykształcenie (podkreślić)

**średnie** ogólne
zawodowe
niepełne

**wyższe** humanistyczne
przyrodnicze
medyczne
techniczne
rolnicze
ekonomiczne

| miejscowość (województwo) | wiek | zawód wykonywany |
| --- | --- | --- |
| | | |

Podpis

Z. G. M. K. — Poznań 1576/64 — 28.000 — O-12/4952

## „OMEGA" 1964

1. Woolley *W poszukiwaniu przeszłości*
2. W. Michajłow *Ewolucjonizm a parazytologia*
3. D. G. Fink i D. M. Lutyens *Fizyka telewizji*
4. W. Stęślicka *Rodowód człowieka uzupełniony*
5. H. Melville *Duże cząsteczki*
6. J. Carles *Zapłodnienie*
7. I. Sachs *Drogi i manowce Świata „B"*
8. Z. Pawlak *Maszyna i język*
9. F. Zawielski *Czas i jego pomiary*
10. P. Lépine *Wirusy*
11. J. S. Bruner *Proces kształcenia*
12. Z. Jaworowski *Radioaktywność a zdrowie ludzkie*
13. J. Niegowski i W. Rydygier *Handel zagraniczny w gospodarce narodowej*
14. J. Rostand *Biologia twórcza*
15. J. Hadamard *Psychologia odkryć matematycznych*
16. J. Jaroszyński *Współczesne poglądy na choroby psychiczne*
17. D. Finkelsztejn *Gazy szlachetne*
18. J. Malec-Olecha *Izotopy w służbie biologii*
19. J. Chadwick *Odczytanie pisma linearnego B*

Jedną z najnowszych teorii matematycznych jest Teoria Gier. „Podstawowe pojęcia Teorii Gier stanęły na pierwszej linii frontu podczas rewolucji w zakresie teorii statystycznej unifikującej na pozór zupełnie różne dziedziny wiedzy. Pojęcia te zaczynają znajdować zastosowanie także w naukach społecznych, gdzie mogą rzucić światło na pewne aspekty stosunków międzyludzkich. Trudno przewidzieć, gdzie z kolei wkroczy Teoria Gier". „Pojęcie strategii, różnice między graczami, rola zdarzeń losowych, macierzowe przedstawianie wypłat, pojęcie strategii czystych i mieszanych itd. dają cenną orientację ludziom, którzy muszą myśleć o złożonych sytuacjach konfliktowych".

Wprowadzeniu i wyjaśnieniu tych pojęć oraz ukazaniu niektórych spośród wielu możliwych ich zastosowań poświęcona jest ta książka.

Cena w subskrypcji zł 10.–

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN